

**Geodetický a kartografický ústav Bratislava
Chlumeckého 4, 827 45 Bratislava**

Technická správa

**SÚRADNICOVÝ SYSTÉM JEDNOTNEJ
TRIGONOMETRICKEJ SIETE KATASTRÁLNEJ
A
JEHO VZŤAH K EURÓPSKEMU
TERESTRICKÉMU REFERENČNÉMU
SYSTÉMU 1989
(Verzia 2.0)**

Ing. Droščák Branislav, PhD.

Bratislava, 2014

ÚVOD

Používanie globálnych navigačných družicových systémov (ďalej GNSS) na presné určovanie polohy bodov sa začalo rutinne uplatňovať v geodetickej praxi zhruba od konca 90-tych rokov XX. storočia. Bolo to spôsobené najmä rozvojom samotných družicových systémov, vývojom metód merania a metodík spracovania družicových observácií, ale aj zvýšenou dostupnosťou geodetických aparátúr. Postupom času bolo možné určovať polohy bodov s „geodetickou“ (rozumej centimetrovou) presnosťou čoraz rýchlejšie a komfortnejšie, čomu výraznejšie napomohlo aj budovanie sietí permanentných referenčných staníc využívajúcich GNSS a nim prislúchajúcich služieb. Táto efektívnosť a najmä dosažiteľná presnosť umožnila Geodetickému a kartografickému ústavu Bratislava (ďalej GKÚ), správcovi geodetických základov Slovenska, v roku 2003 historicky prvýkrát overiť s vysokou presnosťou globálnu kvalitu rovinných súradníc stávajúcej realizácie záväzného súradnicového systému Jednotnej trigonometrickej siete katastrálnej (ďalej S-JTSK) na celom území Slovenska a posúdiť vhodnosť ich ďalšieho používania do budúcnosti. Úlohou GKÚ ako správcu geodetických základov jedného z členských štátov Európskej únie bolo aj dostatočne presne integrovať národné geodetické základy Slovenska (t.j. záväzný súradnicový systém S-JTSK) do jednotného paneurópskeho súradnicového systému t.j. Európskeho terestrického referenčného systému 1989 (ďalej ETRS89), a tým umožniť využívať GNSS technológie pri práci v ňom. Na základe výsledkov tohto globálneho overenia kvality pôvodnej realizácie národného súradnicového systému, ktorú v zmysle filozofie definovania systémov a realizácii budeme ďalej označovať ako JTSK, a za účelom splnenia vyššie spomenutej požiadavky, bola zadefinovaná nová realizácia národného záväzného súradnicového systému, ktorá dostala označenie JTSK03. Číslovka 03 za označením JTSK predstavuje práve rok 2003, v ktorom bolo vykonané overenie kvality stávajúcej realizácie JTSK a v ktorom bola vypočítaná prvá verzia novej realizácie JTSK03. Realizácia JTSK03 je navrhnutá tak, že má definovaný jednoznačný vzťah voči ETRS89 a v plnej miere vyhovuje súčasným požiadavkám na určovanie polohy prostredníctvom GNSS. Jej jednoznačný vzťah s pôvodnou realizáciou JTSK zabezpečuje Rezortná transformačná služba zriadená Úradom geodézie, kartografie a katastra SR (vyhláška ÚGKK SR č.26/2014).

1 SÚRADNICOVÝ SYSTÉM JEDNOTNEJ TRIGONOMETRICKEJ SIETE KATASTRÁLNEJ

1.1 Definícia S-JTSK

Súradnicový systém Jednotnej trigonometrickej siete katastrálnej je v zmysle všeobecnej definície geodetických súradnicových systémov charakterizovaný týmito základnými atribútmi:

1. Besselovým elipsoidom 1841 so základným poludníkom Ferro,
2. Křovákovým zobrazením - konformným kužeľovým zobrazením vo všeobecnej polohe definujúcim výpočet pravouhlých rovinných súradníc zo zemepisných súradníc určených na Besselovom elipsoide 1841.

Súradnicový systém jednotnej trigonometrickej siete katastrálnej spolu s konformným kužeľovým zobrazením vo všeobecnej polohe navrhol a pre civilné geodetické účely novo vznikajúceho Československého štátu (1918) zadefinoval v rozmedzí rokov 1919-1920 Ing. Josef Křovák, prednosta vtedajšej Triangulačnej kancelárie pri Ministerstve financií. Nový súradnicový systém reprezentovaný základnou jednotnou trigonometrickou sieťou (JTSK)

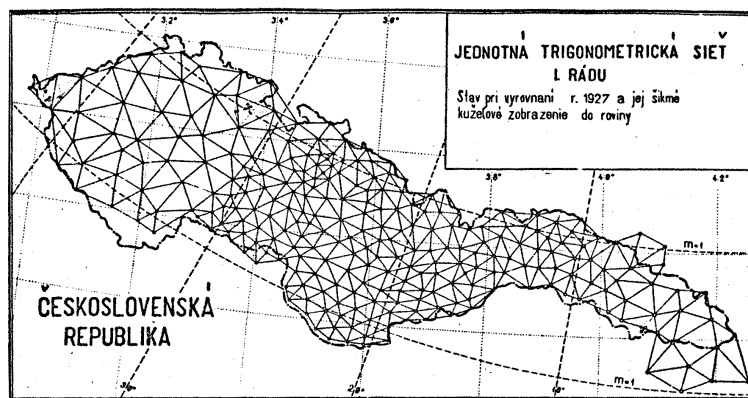
mal za úlohu zjednotiť dovtedy existujúce nesúrodé triangulačné základy a rôznorodé súradnicové systémy nachádzajúce sa na území republiky (Abelovič, 1990). Z tohto pohľadu možno JTSK - Jednotnú trigonometrickú sieť katastrálnu v zmysle dnešnej definície považovať za prvú realizáciu súradnicového systému S-JTSK.

Pozn. Všeobecne možno realizácie systémov charakterizovať spôsobom vykonania fyzických (terénnych) meraní, spôsobom výpočtu a vyrovnania súradníc bodov siete a spôsobom umiestnenia vyrovnanej množiny bodov na referenčný elipsoid. Presnosť a kvalita tohto umiestnenia vyrovnanej množiny bodov na referenčný elipsoid vždy závisela a závisí od možností doby realizácie systému. V minulosti sa používal spôsob umiestnenia vyrovnanej trigonometrickej siete (s definovaným správnym rozmerom určeným na základe meraných základníc) na referenčný elipsoid cez tzv. Laplaceove body, t.j. body so známymi astronomickými súradnicami. Dnes už je možné pomocou GNSS priamo určovať súradnice bodov vzťahnuté na zvolený referenčný elipsoid a preto nutnosť použitia Laplaceových bodov odpadá.

1.2 JTSK - Pôvodná realizácia súradnicového systému S-JTSK

Pôvodná realizácia súradnicového systému Jednotnej trigonometrickej siete katastrálnej označovaná ako JTSK je reprezentovaná bodmi Štátnej trigonometrickej siete (ŠTS) pôvodne označenej ČSTS (Československá trigonometrická sieť). I. rád tejto trigonometrickej siete bol zrealizovaný v rozmedzí rokov 1920-1927, na túto dobu typickým spôsobom. Išlo o vykonanie presných meraní horizontálnych uhlov na bodoch siete, ktoré pokračovalo vyrovnaním trigonometrickej siete, jej umiestnením na Besselov elipsoid 1841 a končilo výpočtom rovinných súradníc v zmysle zadefinovaného Křovákovho zobrazenia. Podľa (Daniš a Vaľko, 1988) alebo (Abelovič, 1990) bolo budovanie trigonometrickej siete I. rádu a práce v nej organizované tak, aby sa čo najrýchlejšie získal spoľahlivý základ pre jej ďalšie zhusťovanie. Z časových dôvodov tak nebola trigonometrická sieť I. rádu vybudovaná podľa dovtedy známych zásad, pretože neboli merané geodetické základnice, nebolo vykonané astronomické meranie na LaPlaceových bodoch siete a sieť nebola spojená s okolitými sieťami susedných štátov. Postup budovania JTSK možno zosumarizovať nasledovne:

1. Osnovy smerov na 42-och bodoch trigonometrickej siete I. rádu v Čechách a na 22-och bodoch umiestnených na území dnešnej Zakarpatskej Ukrajiny boli prevzaté z predošlých stupňových meraní. Na väčšine ostatných bodoch siete, nachádzajúcich sa na území Moravy a Slovenska, boli vykonané a do spracovania zobrať nové uhlové merania vykonané v rokoch 1921-1927 Schreiberovou metódou s váhou 24 alebo 36. Trigonometrická sieť I. rádu, ako základná množina bodov realizujúcich S-JTSK vybudovaná na celom území vtedajšieho Československa, tak obsahovala 268 trigonometrických bodov, ktoré tvorili 456 trojuholníkov (viď. obr.1.1).



Obr.1.1 Jednotná trigonometrická sieť I. rádu reprezentujúca pôvodnú realizáciu JTSK, prevzaté z (Abelovič, 1990).

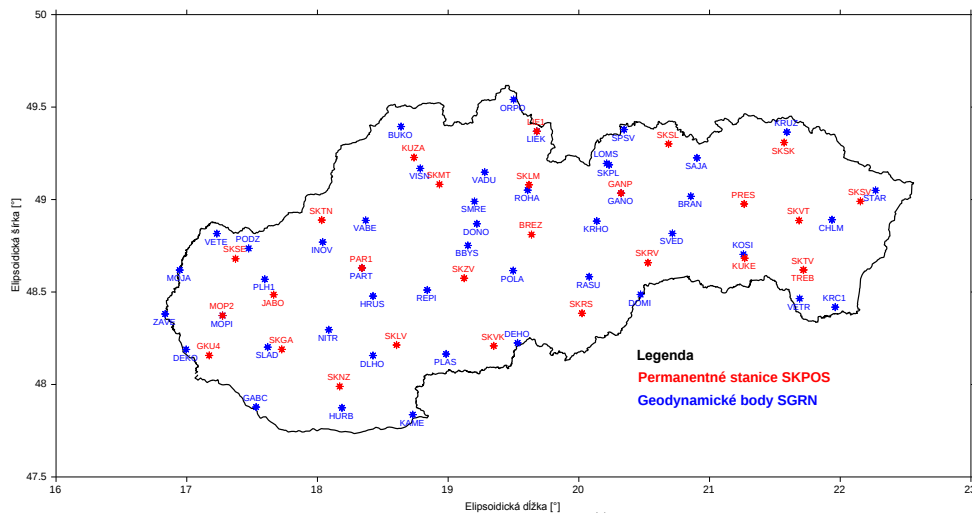
2. Trigonometrická sieť I. rádu bola vyrovnaná tvarovo v jednom celku postupnou aproximáciou v rovine Křovákovo zobrazenia. Vyrovnaním siete bol určený iba jej definitívny tvar. Keďže z časových dôvodov neboli merané základnice a neboli vykonané žiadne astronomické merania, jej rozmer, poloha a orientácia na Besselovom elipsoide 1841 boli určené nepriamo, t.j. z rakúskej vojenskej triangulácie, s ktorou mala trigonometrická sieť I. rádu 107 identických bodov. Zo 42-och vybraných identických bodov boli vypočítané transformačné prvky pre celú sieť a následne boli vypočítané definitívne pravouhlé súradnice všetkých bodov trigonometrickej siete I. rádu v Křovákovom zobrazení. Prakticky tak bol rozmer siete určený z *jozefovskej základnice* rakúskej vojenskej triangulácie a poloha siete podľa starého astronomického merania na základnom bode rakúskej vojenskej triangulácie *Hermannskogel*. Orientácia siete je tak silne ovplyvnená hodnotou zvislicovej odchýlky v tomto bode (Abelovič, 1990).
3. V rokoch 1928-1957 bola postupne táto trigonometrická sieť I. rádu zhutňovaná bodmi II. až V. rádu až na hustotu o priemernej dĺžke strán 2 km (Charvát, 1960). Zhutňovanie siete neprebiehало systematicky, ale na rôznych miestach podľa potreby, pričom pri vyrovnaní súradníc bodov nižších rádov boli považované body vyšších rádov za pevné (ich súradnice sa nemenili). Výnimku predstavovalo pripojenie 20-tich bodov pozdĺž slovensko-maďarskej hranice k sieti I. rádu vykonané v rokoch 1949-1959, kedy došlo k prevyrovnaniu niektorých bodov (Abelovič, 1990). Takýto zásah bol veľmi nebezpečný a predstavuje narušenie homogenity súradníc siete v tejto oblasti.

Napriek tomu, že vnútorná presnosť realizácie JTSK (presnosť v polohe detailného bodu voči susedným bodom) je označovaná ako veľmi vysoká (± 1 cm), pričom takáto nebola dosiahnutá v žiadnych iných trianguláciách na svete (Abelovič, 1990), mala a má realizácia JTSK z vedeckého hľadiska, z hľadiska medzinárodnej spolupráce ako aj z hľadiska jej globálneho využitia pre rôzne aplikácie prekračujúce lokálny rámec (líniové stavby, veľkoplošné stavby) závažné nedostatky, ktoré je možné odstrániť iba vypočítaním novej presnejšej realizácie so správnym spôsobom umiestnenia bodov na referenčný elipsoid.

1.3 JTSK03 – Nová realizácia súradnicového systému S-JTSK

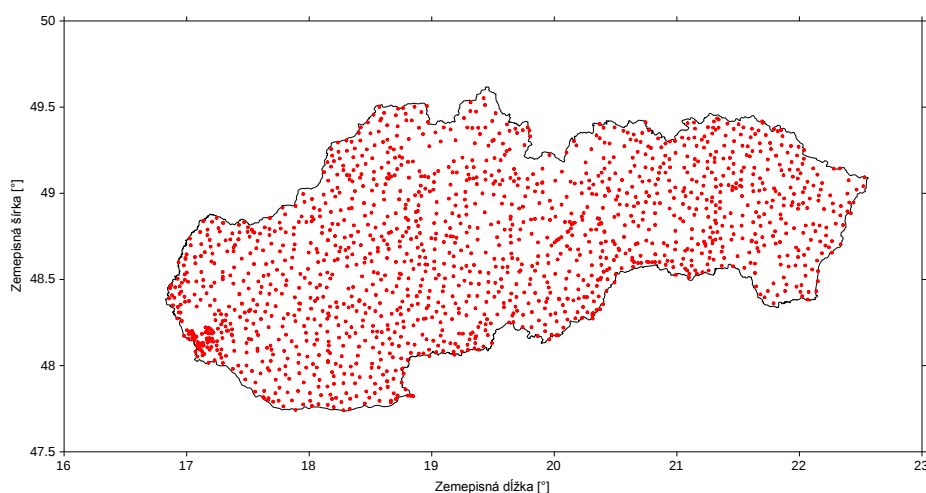
Návrh novej realizácie súradnicového systému Jednotnej trigonometrickej siete katastrálnej označenej ako JTSK03 vychádzal z možností využitia GNSS, z geodetického hľadiska homogénne najpresnejšej dostupnej technológie určovania polohy bodov. Realizácia JTSK03 bola preto vytvorená pomocou GNSS a zabezpečuje nielen spomenutú vysokú presnosť a globálnu homogénnosť súradníc všetkých bodov na celom území štátu, ale zároveň zabezpečuje aj jednoznačnú väzbu národného súradnicového systému S-JTSK na paneurópsky ETRS89. Postup realizácie JTSK03 pozostával z troch krokov, a to z vybudovania ŠPS, z odhadu transformačných parametrov medzi ETRS89 a S-JTSK(JTSK) a z výpočtu nových polohových súradníc S-JTSK(JTSK03) použitím odhadnutých transformačných parametrov. Jednotlivé kroky možno podrobnejšie popísať nasledovne:

1. Priestorové karteziánske súradnice bodov A a B triedy Štátnej priestorovej siete (ďalej ŠPS) vzťahnuté na geocentrický referenčný systém s počiatkom v strede elipsoidu Geodetického referenčného systému 1980 (ďalej GRS80) reprezentujú základnú množinu súradníc Slovenska v systéme ETRS89, konkrétne v realizácii ETRF2000. Polohy bodov A a B triedy ŠPS sú zobrazené na obr.1.2.



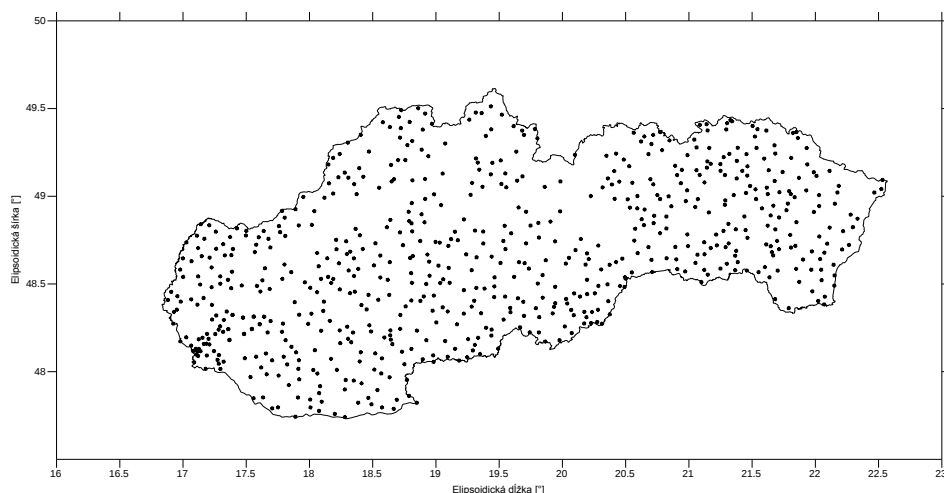
Obr.1.2 Rozloženie bodov A a B triedy ŠPS (stav - marec 2011).

Priestorové karteziánske ETRS89 súradnice bodov A a B triedy ŠPS s charakteristikami presnosti boli určené presným spracovaním permanentných resp. epochových (kampaňových) statických observácií GNSS pomocou vedeckého softvéru Bernese v.5.0 (Dach et al., 2007). Súradnice permanentných staníc resp. bodov A triedy ŠPS boli najprv určené z obdobia 6-tich týždňov z roku 2006 (GPS týždne 1380-1386). Tieto boli neskôr spresnené výpočtom z obdobia 3-och rokov (GPS týždne 1400-1556) postupom popísaným v (Droščák, 2010), (Droščák, 2009a), (Droščák a Ferianc, 2010), alebo čiastočne v (Droščák, 2008). Karteziánske súradnice geodynamických bodov Slovenskej geodynamickej referenčnej siete (ďalej SGRN) teda bodov triedy B ŠPS boli určené taktiež vedeckým softvérom Bernese v.5.0 zo statických kampaňových meraní vykonaných v období rokov 1993-2005 stratégiou popísanou v (Leitmannová a kol., 2005) alebo detailnejšie v (Leitmannová a Havlíková, 2005), kde riešenie vystupuje pod hlavičkou Slovenský kinematický referenčný rámec 2005 (ďalej SKTRF2005). Neskôr boli súradnice týchto bodov opäť spresnené, pričom boli vzaté do výpočtu všetky viac-hodinové merania vykonané na bodoch SGRN v rozmedzí rokov 2000-2009 vrátane. Výsledné riešenie je označené ako SKTRF2009 a jeho filozofia je naznačená v (Droščák, 2009b) a postup s výpočtu súradníc je uvedený v (Droščák, 2010). Priestorové karteziánske ETRS89 súradnice bodov triedy C a D ŠPS boli určované presným statickým alebo RTK statickým meraním pomocou technológie GNSS. Vykonané merania boli naviazané na body A resp. B triedy ŠPS, čím je zabezpečená homogenita súradníc celej národnej realizácie ETRS89 t.j. súradnice bodov všetkých tried ŠPS sú určené v totožnom referenčnom rámci ETRF2000. Na všetkých 1576-ich bodoch triedy C (obr.1.3) bolo vykonané minimálne jedno 6-hodinové statické meranie. Spracovanie týchto meraní bolo vykonané softvérom Bernese v.5.0 spoločne so súbežnými observáciami na bodoch triedy A alebo B ŠPS. Spájanie výsledných riešení do jedného celku bolo vykonané programovým riešením WIGS (Klobušiak, 1995-2001). Uvedený postup výpočtu bol používaný do roku 2007. Po tomto roku sa pri určovaní nových bodov triedy C využíva výlučne vedecký softvér Bernese v.5.0, v ktorom sa vykonáva referencovanie súradníc k ETRF2000 a aj spájanie opakovaných meraní toho istého bodu. Určovanie súradníc bodov triedy D ŠPS do ETRF2000 bolo a je vykonávané priamo pomocou statických RTK meraní s využívaním **SKPOS**[®], prípadne nepriamo pomocou statických cca. 2-hodinových meraní spracovaných komerčnými softvérmi spoločne s Virtuálnou referenčnou stanicou vygenerovanou službou **SKPOS**[®]. Na každom bode triedy D ŠPS boli vykonané minimálne dve merania.



Obr.1.3 Rozloženie bodov C triedy ŠPS (stav – marec 2011).

2. Umiestnenie celej referenčnej množiny bodov ŠPS reprezentujúcich realizáciu ETRS89 na Besselov elipsoid 1841, pre ktorý je definovaný S-JTSK, bolo uskutočnené pomocou 7-parametrickej Helmertovej transformácie, nazývanej aj ako „globálny transformačný kľúč“, ktorý vyjadruje vzťah medzi oboma spomenutými elipsoidmi. Pri jeho odhade boli ako prvé vypočítané 4 transformačné parametre pomocou odhadu MNŠ uplatnením metódy transformácie súradníc na povrchu elipsoidu stotožnením normál. Ako identické body bola použitá množina 684-och identických bodov C triedy ŠPS (obr.1.4), ktoré mali okrem určených súradníc v ETRF2000 aj známe súradnice v pôvodnej realizácii JTSK (body Štátnej trigonometrickej siete, ktoré boli prevzaté do ŠPS). Následne uplatnením odhadnutých transformačných parametrov došlo k výpočtu „presných“ elipsoidických súradníc pre Bessel 1841 elipsoid a spätne k odhadu 7-ich transformačných parametrov Helmertovej transformácie pre smer z elipsoidu Bessel 1841 na elipsoid GRS80. Odhad transformačných parametrov bol vykonaný softvérom DTplus (Klobušiak, 1995-2006) a detailne je popísaný v práci (Klobušiak a kol., 2006). Mierkový faktor, ako jeden z transformačných parametrov, bol nastavený ako rovný 0, aby bola zabezpečená konzistentnosť mierky medzi elipsoidmi GRS80 a Bessel 1841, teda aby nedošlo k skresleniu hodnoty „metra“ v realizácii JTSK03.



Obr.1.4 Rozloženie identických bodov použitých na výpočet transformačných parametrov.

3. Rovinné súradnice bodov v realizácii JTISK03 z meraní GNSS sa získali jednoducho. Najprv sa pretransformovali karteziánske súradnice vyjadrené v ETRS89 (ETRF2000) pomocou 7-parametrickej Helmertovej transformácie, čím sa získali priestorové karteziánske súradnice na Besselovom elipsoide 1841. Tieto sa následne previedli na elipsoidické súradnice a tie sa pomocou zobrazovacích rovníc Křovákovej projekcie previedli do roviny (pozn. podrobnejší postup výpočtu rovinných súradníc realizácie JTISK03 je uvedený v nasledovných kapitolách).

2. MATEMATICKÁ DEFINÍCIA VZŤAHU MEDZI ETRS89 (ETRF2000) A S-JTISK (JTISK03)

Schematický zápis transformácie elipsoidických súradníc „ $\varphi\lambda h$ “ vyjadrených v ETRS89 (ETRF2000) do rovinných súradníc „ yx “ realizácie JTISK03 a výšky „ H “ realizácie Bpv

$$(\varphi\lambda h)_{ETRF\ 2000} \xrightarrow{T_1} (XYZ)_{ETRF\ 2000} \xrightarrow{T_2} (XYZ)_{Bessel1841} \xrightarrow{T_3} (\varphi\lambda h)_{Bessel1841} \xrightarrow{T_4} (yx)_{JTISK03}$$

$$(h)_{ETRF\ 2000} \xrightarrow{T_5} (H)_{Bpv}$$

kde

- T_1 = prevod elipsoidických súradníc $\varphi\lambda h$ na pravouhlé karteziánske XYZ , pričom $h = 0$
- T_2 = 7-prvková Helmertova podobnostná transformácia karteziánskych pravouhlých súradníc XYZ vzťahnutých k počiatku elipsoidu GRS80 (realizácia ETRF2000) na pravouhlé karteziánske súradnice vzťahnuté k počiatku elipsoidu Bessel 1841.
- T_3 = prevod pravouhlých karteziánskych súradníc XYZ na elipsoidické $\varphi\lambda h$,
- T_4 = prepočet elipsoidických súradníc $\varphi\lambda h$ pomocou zobrazovacích rovníc Křovákovo zobrazenia,
- T_5 = prepočet elipsoidickej výšky h na normálnu nadmorskú výšku H_{Bpv} pripočítaním výšky Digitálneho výškového referenčného modelu Bpv (ďalej DVRM).

Schematický zápis transformácie rovinných súradníc „ yx “ realizácie JTISK03 a výšky „ H “ realizácie Bpv do elipsoidických súradníc „ $\varphi\lambda h$ “ vyjadrených v ETRS89 (ETRF2000)

$$(yx)_{JTISK03} + (H)_{Bpv} \xrightarrow{T_4^{-1}} (\varphi\lambda h)_{Bessel1841} \xrightarrow{T_3^{-1}} (XYZ)_{Bessel1841} \xrightarrow{T_2^{-1}} (XYZ)_{ETRF\ 2000} \xrightarrow{T_1^{-1}} (\varphi\lambda)_{ETRF\ 2000}$$

$$(H)_{Bpv} \xrightarrow{T_5^{-1}} (h)_{ETRF\ 2000},$$

kde

hodnoty s horným indexom (-1) znamenajú inverzné transformácie k transformáciám popísaným vyššie.

Pozn. Nakoľko transformácia T_2^{-1} nemá po vykonaní inverzie tvar 7-prvkovej Helmertovej podobnostnej transformácie, bolo nutné tento inverzný vzťah na Helmertov tvar upraviť a vypočítať nové transformačné parametre pre spätnú reverznú transformáciu.

2.1 Prevod elipsoidických geodetických súradníc $\varphi\lambda h$ na pravouhlé karteziánske súradnice XYZ

$$\begin{aligned}
X &= (N + h) \cdot \cos(\varphi) \cdot \cos(\lambda) \\
Y &= (N + h) \cdot \cos(\varphi) \cdot \sin(\lambda) \\
Z &= (N \cdot (1 - e^2) + h) \cdot \sin(\varphi)
\end{aligned} \tag{2.1}$$

kde

φ je zemepisná geodetická šírka,

λ je zemepisná geodetická dĺžka,

h je elipsoidická výška, ktorá je vždy zámerne rovná 0

Pozn. Elipsoidická výška h , je pri výpočtoch zámerne vždy rovná 0, aby bolo zabezpečené, že aj pri neznalosti výšky budú výsledné polohové súradnice po transformácii rovnaké.

N je priečný polomer krivosti vypočítaný ako

$$N = \frac{a}{\sqrt{1 - e^2 \cdot \sin^2(\varphi)}},$$

e je prvá excentricita vypočítaná ako

$$e = \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{a^2}},$$

kde

a je hlavná polos elipsoidu,

b je vedľajšia polos elipsoidu,

pričom b získame ako

$$b = a \cdot (1 - f),$$

kde

f je geometrické sploštenie elipsoidu.

Pre elipsoid Bessel 1841 platí: $a = 6377397,155 \text{ m}$, $1/f = 299,1528154$.

Pre elipsoid GRS80 platí: $a = 6378137,000 \text{ m}$, $1/f = 298,257222101$.

2.2 Prevod pravouhlých karteziánskych súradníc XYZ na elipsoidické súradnice $\varphi\lambda h$

Elipsoidickú dĺžku λ získame jednoducho ako:

$$\lambda = \arctan\left(\frac{Y}{X}\right). \tag{2.2}$$

Elipsoidickú šírku φ a výšku h napr. iteráciami nasledovne:

$$\begin{aligned}
\varphi_0 &= \arctan\left(\frac{Z}{\sqrt{X^2 + Y^2}} \cdot \left(\frac{1}{1 - e^2}\right)\right) \\
N_i &= \frac{a}{\sqrt{1 - e^2 \cdot \sin^2(\varphi_{i-1})}} \\
h_i &= \frac{\sqrt{X^2 + Y^2}}{\cos(\varphi_{i-1})} - N_i \\
\varphi_i &= \arctan\left(\frac{Z}{\sqrt{X^2 + Y^2}} \cdot \left(\frac{N_{i-1} + h_{i-1}}{N_{i-1} + H_{i-1} - e^2 \cdot N_{i-1}}\right)\right)
\end{aligned} \tag{2.3}$$

Pozn. Parametre použité vo vzťahoch (2.2) a (2.3) sú definované v predchádzajúcej kapitole 2.1.

2.3 7-prvková Helmertova transformácia pravouhlých karteziánskych súradníc XYZ vztiahnutých k počiatku elipsoidu GRS80 (realizácia ETRF2000) na pravouhlé karteziánske súradnice vztiahnuté k počiatku elipsoidu Bessel 1841.

2.3.1 Odhad parametrov 7-prvkovej Helmertovej transformácie

Odhad všetkých parametrov 7-prvkovej Helmertovej transformácie karteziánskych súradníc XYZ vztiahnutých k počiatku elipsoidu GRS80 (realizácia ETRF2000) na pravouhlé súradnice XYZ vztiahnuté k počiatku elipsoidu Bessel 1841, bol uskutočnený metódou najmenších štvorcov programovým vybavením DTplus (Klobušiak, 1995-2006) v roku 2006. Išlo o odhad parametrov uplatnením vzťahu (2.4), ktorému predchádzal výpočet homogénnych karteziánskych súradníc na elipsoide Bessel 1841 (ľavá strana vo vzťahu (2.5)). Celý postup je podrobnejšie popísaný v (Klobušiak a kol., 2006).

Vzťah medzi ETRS89 (ETRF2000) a S-JTSK (JTSK03), teda medzi elipsoidmi GRS80 a Bessel 1841 môžeme jednoducho definovať pomocou Helmertovej transformácie (označovanej ako trojrozmerná konformná transformácia – Burša Wolfov model) nasledovne:

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}_{Bessel1841} = \begin{pmatrix} t_x \\ t_y \\ t_z \end{pmatrix} + (1+m) \cdot \begin{pmatrix} \cos(r_y) \cdot \cos(r_z) & \cos(r_x) \cdot \sin(r_z) + \sin(r_x) \cdot \sin(r_y) \cdot \cos(r_z) & \sin(r_x) \cdot \sin(r_z) - \cos(r_x) \cdot \sin(r_y) \cdot \cos(r_z) \\ -\cos(r_y) \cdot \sin(r_z) & \cos(r_x) \cdot \cos(r_z) - \sin(r_x) \cdot \sin(r_y) \cdot \sin(r_z) & \sin(r_x) \cdot \cos(r_z) + \cos(r_x) \cdot \sin(r_y) \cdot \sin(r_z) \\ \sin(r_y) & -\sin(r_x) \cdot \cos(r_z) & \cos(r_x) \cdot \cos(r_z) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}_{ETRF2000}$$

To môžeme zjednodušene zapísať ako

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}_{Bessel1841} = \begin{pmatrix} t_x \\ t_y \\ t_z \end{pmatrix} + (1+m) \cdot \begin{pmatrix} 1 & r_z & -r_y \\ -r_z & 1 & r_x \\ r_y & -r_x & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}_{ETRF2000} \quad (2.4)$$

resp. maticovým zápisom

$$X_{Bessel1841} = T + (1+m) \cdot R \cdot X_{ETRF2000} \quad (2.5)$$

kde

- t_x translácia v smere osi X,
- t_y translácia v smere osi Y,
- t_z translácia v smere osi Z,
- r_x rotácia osi X,
- r_y rotácia osi Y,
- r_z rotácia osi Z,
- m parameter zmeny mierky.

Uvedené vzťahy (2.4) resp. (2.5) platia v prípade, že zdrojové karteziánske súradnice predstavujú S-JTSK (JTSK03) súradnice vyjadrené na Besselovom elipsoide 1841 a cieľovými súradnicami sú karteziánske súradnice v ETRS89 (ETRF2000). Ak ale máme definovanú úlohu opačne t.j. poznáme súradnice bodov v ETRS89 (ETRF2000) a chceme určiť súradnice na Besselovom elipsoide 1841 a následne v S-JTSK(JTSK03) a použili by sme nasledovný vzťah

$$\mathbf{X}_{Bessel1841(JTSK\ 03)} = -\mathbf{T} + (1 - m)^T \cdot \mathbf{R}^T \cdot \mathbf{X}_{GRS80(ETRS89)} \quad (2.6)$$

dopustíme sa systematickej chyby, ktorej veľkosť v rovine Křovákovo zobrazenia predstavuje 8-9mm v smere osi y a 1-2mm v smere osi x . Jediným možným riešením ako dostať „nulové“ rozdiely medzi transformáciou „tam a späť“ je definovanie korektného inverzného vzťahu ku vzťahu (2.5) nasledovne

$$\mathbf{X}_{Bessel1841(JTSK\ 03)} = (1 + m)^{-1} \cdot \mathbf{R}^{-1} \cdot (\mathbf{X}_{GRS80(ETRS89)} - \mathbf{T}) \quad (2.7)$$

Pri pohľade na tento vzťah je ale zrejmé, že nejde o korektný Helmertov tvar rovnice, čo je pre väčšinu používateľov GNSS prístrojového vybavenia problém, nakoľko si takýto vzťah nedokážu do svojich softvérov, alebo prijímačov naimplementovať. Riešenie tohto problému je ale veľmi elegantné a pozostáva z odhadu tzv. reverzných parametrov, ktorých hodnoty sa dajú vypočítať jednoduchou substitúciou. Najprv je potrebné roznásobiť vyššie uvedený inverzný vzťah (2.7) nasledovne

$$\mathbf{X}_{Bessel1841(JTSK\ 03)} = -(1 + m)^{-1} \cdot \mathbf{R}^{-1} \cdot \mathbf{T} + (1 + m)^{-1} \cdot \mathbf{R}^{-1} \cdot \mathbf{X}_{GRS80(ETRS89)} \quad (2.8)$$

Následne použitím substitúcií

$$\mathbf{T}_{reverzne} = -(1 + m)^{-1} \cdot \mathbf{R}^{-1} \cdot \mathbf{T}, \quad \mathbf{R}_{reverzne} = \mathbf{R}^{-1}, \quad m_{reverzne} = (1 + m)^{-1} - 1, \quad (2.9)$$

prejde inverzný vzťah (2.8) na tvar

$$\mathbf{X}_{Bessel1841(JTSK\ 03)} = \mathbf{T}_{reverzne} + (1 - m_{reverzne}) \cdot \mathbf{R}_{reverzne} \cdot \mathbf{X}_{GRS80(ETRS89)}, \quad (2.10)$$

ktorý je už korektným Helmertovým vzťahom, s ktorým vedú všetky štandardne používané softvéry jednoznačne narábať. Samotné hodnoty inverzných (reverzných) parametrov potom jednoducho vypočítame podľa vyššie uvedených substitúcií (2.9).

2.3.2. Odhadnuté hodnoty globálneho transformačného kľúča – 7 parametrov Helmertovej transformácie vyjadrujúcich vzťah medzi ETRS89 (ETRF2000) a S-JTSK(JTSK03)

Na odhad parametrov globálneho transformačného kľúča bolo použitých 684 identických bodov ŠPS triedy C, ktorých rozloženie je uvedené na (obr.1.4). Identické body mali presne určené súradnice v ETRS89 (ETRF2000) programom WIGS (Klobušiak,1995-2001), ktorý využíva spracované výstupy vykonané Bernským softvérom. Identické body mali zároveň známe aj rovinné súradnice v pôvodnej realizácii JTSK, nakoľko išlo o body Štátnej trigonometrickej siete, ktoré boli prevzaté do ŠPS. Metódou uvedenou v (Klobušiak a kol., 2006) bolo odhadnutých 7-parametrov Helmertovej transformácie aj s príslušnými charakteristikami presnosti. Nakoľko bol záujem zabezpečiť mierkovú homogénnosť realizácie JTSK03 s mierkovou homogénnosťou ETRS89, ľudovo povedané, aby bol meter

definovaný a realizovaný na elipsoide GRS80 aj metrom na elipsoide Bessel 1841 pre realizáciu JTSK03, bola hodnota mierkového faktoru dodatočne zvolená za 0 ($m = 0$).

Odhadnuté hodnoty transformačných parametrov

Smer transformácie S-JTSK(JTSK03) → ETRS89 (ETRF2000)

Translácia v smere osi X: $t_x = 485,021$ m,

Translácia v smere osi Y: $t_y = 169,465$ m,

Translácia v smere osi Z: $t_z = 483,839$ m,

Rotácia osi X: $r_x = -7,786342''$,

Rotácia osi Y: $r_y = -4,397554''$,

Rotácia osi Z: $r_z = -4,102655''$,

Parameter zmeny mierky: $m = 0,000000$ ppm,

Smer transformácie ETRS89 (ETRF2000) → S-JTSK(JTSK03)

Translácia v smere osi X: $t_x = -485,014055$ m,

Translácia v smere osi Y: $t_y = -169,473618$ m,

Translácia v smere osi Z: $t_z = -483,842943$ m,

Rotácia osi X: $r_x = 7,78625453''$,

Rotácia osi Y: $r_y = 4,39770887''$,

Rotácia osi Z: $r_z = 4,10248899''$,

Parameter zmeny mierky: $m = 0,000000$ ppm,

2.4 Poznámka k používaniu transformačných parametrov

Pri používaní parametrov Helmertovej transformácie si treba uvedomiť, že parametre sú určené a platia iba medzi ETRS89 (ETRF2000) a S-JTSK (JTSK03). Preto, ak sú výpočty alebo merania vykonané v inej realizácii ETRS89 (napr. ETRF1997, ETRF1996, atď.) alebo v inom referenčnom systéme (napr. WGS89, ITRS atď.), je potrebné ich pred použitím transformačných vzťahov prekonvertovať do ETRS89 a rámca ETRF2000, v inom prípade nebudú výsledné súradnice v JTSK03, ale v neznámom nešpecifikovanom zobrazení, ktoré sa môže na realizáciu JTSK03 čiastočne podobáť. Preto je odporúčané všetky merania vykonané pomocou GNSS naväzovať na aktívne alebo pasívne geodetické základy Slovenska t.j. na službu **SKPOS**[®], alebo body ŠPS (body B,C a D triedy), ktoré reprezentujú ETRS89 a jeho ETRF2000 realizáciu na Slovensku.

3. DEFINÍCIA VZŤAHU MEDZI S-JTSK (JTSK03) A S-JTSK (JTSK)

Vzťah medzi pôvodnou realizáciou JTSK a novou realizáciou JTSK03 vyjadrujú vektory súradnicových rozdielov definované v rovine JTSK03 na 670 identických bodoch. Ide

o rovnakú množinu identických bodov, ktorá bola použitá aj na výpočet 7-ich transformačných parametrov globálneho transformačného kľúča (viď. kapitola 2.3.2) zníženú o 14 bodov vylúčených na základe prekročenia stanovených kritérií. Zobrazenie týchto súradnicových rozdielov sa nachádza na obr.3.1.



Obr.3.1 Súradnicové rozdiely medzi pôvodnou (JTSK) a novou (JTSK03) realizáciou S-JTSK na identických bodoch.

Vypočítané súradnicové rozdiely charakterizujú systematickú nehomogenitu pôvodnej realizácie JTSK, avšak nevystihujú detailnú nehomogenitu menších lokalít na centimetrovej úrovni. Pre účely jednoznačnej definície transformačného vzťahu medzi realizáciami JTSK a JTSK03 bolo potrebné súradnicové rozdiely (obr. 3.1) vyjadriť v tvare pravidelnej mriežky a definovať spôsob interpolácie. Za týmto účelom boli súradnicové rozdiely medzi JTSK a JTSK03 v tvare elipsoidických súradníc na Besselovom elipsoide 1841 pre jednotlivé osi interpolované metódou krigging softvérom Surfer do pravidelnej mriežky tzv. gridu s krokom $0,0168''$ (φ) x $0,025''$ (λ), ktorý bol implemetovaný do Rezortnej transformačnej služby zriadenej Rozhodnutím predsedníčky ÚGKK SR č. P-666/2013 zo dňa 30.1.2013.

3.1 Rezortná transformačná služba a Prevodová interpolačná tabuľka

Rezortná transformačná služba bola zriadená na základe rozhodnutia predsedníčky ÚGKK SR ako referenčná transformačná služba na transformáciu údajov medzi ETRS89 a S-JTSK na Slovensku. Rezortná transformačná služba (obr.3.2) je voľne dostupná širokej verejnosti prostredníctvom rezortného geoportálu (www.geoportal.sk) na adrese <https://zbgis.skgeodesy.sk/zbgistransform/>.



Obr.3.2 Základné webové rozhranie Rezortnej transformačnej služby.

Rezortná transformačná služba umožňuje korektne transformovať súradnice medzi všetkými projekciami ETRS89 do oboch S-JTSK realizácii a späť. Služba využíva pri transformácii údajov z JTSK03 do JTSK a späť bilineárnu interpoláciu gridu súradnicových rozdielov vyjadrených v tvare elipsoidických súradníc na Besselovom elipsoide 1841. To znamená, že rovinné súradnice JTSK resp. JTSK03 sú najprv prepočítané rovnicami Křovákovej projekcie na Besselov elipsoid 1841, tu dôjde ku korekcii súradníc o vyinterpolovanú hodnotu z implementovaného gridu a následne sa opravené elipsoidické súradnice opäť prepočítajú do roviny JTSK resp. JTSK03 rovnicami Křovákovo zobrazenia (kapitola 4). Pre zjednodušenie implementácie transformácie medzi realizáciami JTSK03 a JTSK do prostredia softvérov a prijímačov GNSS bola ako produkt Rezortnej transformačnej služby spracovaná Prevodová interpolačná tabuľka obsahujúca rozdiely medzi realizáciami JTSK03 a JTSK v rovine realizácie JTSK03 s krokom 1x1 km v textovom tvare. Prevodová interpolačná tabuľka je voľne dostupná na viacerých miestach napr. na <http://www.gku.sk/produkty-a-sluzby>. Rozsah Prevodovej interpolačnej tabuľky presahuje územie Slovenska preto, aby bolo možné po jej implementácii vykonávať aj transformáciu súradníc z pohraničných pásiem.

4. ROVNICE KŘOVÁKOVHO ZOBRAZENIA (KŘOVÁKOVEJ PROJEKCIE)

Prevod elipsoidických súradníc vzťahnutých k Besselovmu elipsoidu 1841 do Křovákovo zobrazenia pozostáva zo štyroch na seba nadväzujúcich krokov:

1. zo zobrazenia Besselovho elipsoidu na guľovú plochu (Gausovú guľu),
2. z transformácie zemepisných sférických súradníc guľovej plochy na sférické kartografické súradnice na guľovej ploche (Gaussovej guľi),
3. zo zmenšenia guľovej plochy (Gaussovej guľe) a jej konformného zobrazenia na dotykový kužeľ vo všeobecnej polohe
4. z rozvinutia plochy dotykového kužeľa do roviny, pričom os x pravouhlého rovinného súradnicového systému smeruje na juh a os y na západ.

4.1 Konštanty a parametre vstupujúce do Křovákovo zobrazenia

a.) parametre elipsoidu Bessel 1841 so základným poludníkom Ferro

$$\begin{aligned} a_{Bessel1841} &= 6377397,155 \text{ m} && \text{dĺžka hlavnej polosi elipsoidu Bessel 1841,} \\ b_{Bessel1841} &= 6356078,9633 \text{ m} && \text{dĺžka vedľajšej polosi elipsoidu Bessel 1841,} \\ \lambda_{FG} &= 17^{\circ} 40' && \text{zemepisná dĺžka medzi základnými poludníkmi Ferro} \\ &&& \text{a Greenwich na elipsoide Bessel 1841 (Ferro je na západ od} \\ &&& \text{Greenwich),} \end{aligned}$$

Numerickú excentricitu e pre elipsoid Bessel 1841 vypočítame ako:

$$e = \sqrt{\frac{a_{Bessel1841}^2 + b_{Bessel1841}^2}{a_{Bessel1841}^2}} \quad (4.1)$$

b.) základné parametre Křovákovo konformného kužeľového zobrazenia vo všeobecnej polohe. Označenie prevzaté z (Daniš a Vaľko, 1988).

$$\varphi_0 = 49^{\circ} 30' \quad \text{zemepisná šírka neskreslenej rovnobežky na elipsoide Bessel 1841,}$$

$\lambda_{KP} = 42^0 30'$	zemepisná dĺžka kartografického pólu na elipsoide Bessel 1841 (definovaná na východ od základného poludníka Ferro),
$\alpha = 1,000597498372$	parameter charakterizujúci konformné zobrazenie elipsoidu Bessel 1841 na guľovú plochu (Gaussovu guľu),
$k = 1,003419164$	parameter charakterizujúci konformné zobrazenie elipsoidu Bessel 1841 na guľovú plochu (Gaussovu guľu),
$a = 30^0 17' 17,30311''$	pólová vzdialenosť kartografického pólu na guľovej ploche (Gaussovej guľi),
$k' = 0,9999$	koeficient zmenšenia guľovej plochy (Gaussovej guľe),
$\check{S}_0 = 78^0 30'$	zemepisná šírka základnej kartografickej rovnobežky na guľovej ploche (Gaussovej guľi).

4.2 Výpočet pravouhlých rovinných súradníc y, x Křovákovo zobrazenia z elipsoidických súradníc φ, λ vzťahnutých k elipsoidu Bessel 1841 so základným poludníkom Greenwich

Rovinné súradnice y, x Křovákovo zobrazenia vypočítame ako

$$\begin{aligned} y &= R \cdot \sin(D') \\ x &= R \cdot \cos(D') \end{aligned} \quad (4.2)$$

pričom platí

$$\begin{aligned} R &= R_0 \cdot \tan^{\sin(\check{S}_0)}\left(\frac{\check{S}_0}{2} + 45^0\right) \cdot \cot^{\sin(\check{S}_0)}\left(\frac{\check{S}}{2} + 45^0\right), \\ D' &= D \cdot \sin(\check{S}_0) \end{aligned} \quad (4.3)$$

kde za $D, \check{S}, R_0$ dosadíme

$$\begin{aligned} D &= \arcsin\left(\frac{\cos(U) \cdot \sin(\Delta V)}{\cos(\check{S})}\right) \\ \check{S} &= \arcsin(\cos(a) \cdot \sin(U) + \sin(a) \cdot \cos(U) \cdot \cos(\Delta V)), \\ R_0 &= k' \cdot \frac{a_{Bessel} \cdot \sqrt{1-e^2}}{1-e^2 \cdot \sin^2(\varphi_0)} \cdot \cot(\check{S}_0) \end{aligned} \quad (4.4)$$

a tie vypočítame pomocou vzťahov

$$\begin{aligned} \Delta V &= \alpha \cdot (\lambda_{KP} - (\lambda + \lambda_{FG})) \\ U &= 2 \cdot \left[\arctan\left(k \cdot \tan^\alpha\left(\frac{\varphi}{2} + 45^0\right) \cdot \left(\frac{1+e \cdot \sin(\varphi)}{1-e \cdot \sin(\varphi)}\right)^{-\left(\frac{\alpha \cdot e}{2}\right)}\right) - 45^0 \right]. \end{aligned} \quad (4.5)$$

4.3 Výpočet elipsoidických súradníc φ, λ vzťahnutých k elipsoidu Bessel 1841 so základným poludníkom Greenwich z pravouhlých rovinných súradníc y, x Křovákovo zobrazenia

$$\lambda = (\lambda_{KP} - \lambda_{FG}) - \frac{\Delta V}{\alpha}$$

φ – iteráciami

$$\varphi_i = 2 \cdot \left(\arctan \left(k^{\left(\frac{-1}{\alpha}\right)} \cdot \tan^{\frac{1}{\alpha}} \left(\frac{U}{2} + 45^0 \right) \cdot \left(\frac{1+e \cdot \sin(\varphi_{i-1})}{1-e \cdot \sin(\varphi_{i-1})} \right)^{\left(\frac{e}{2}\right)} \right) - 45^0 \right), \quad (4.6)$$

$$\varphi_0 = U, i = 1, 2, \dots$$

kde za $\Delta V, U$ dosadíme

$$\Delta V = \arcsin \left(\frac{\cos(\check{S}) \cdot \sin(D)}{\cos(U)} \right), \quad (4.7)$$

$$U = \arcsin(\cos(a) \cdot \sin(\check{S}) - \sin(a) \cdot \cos(\check{S}) \cdot \cos(D))$$

ktoré dostaneme pomocou

$$D = \frac{D'}{\sin(\check{S})}$$

$$\check{S} = 2 \cdot \left(\arctan \left(\left(\frac{R_0}{R} \right)^{\frac{1}{\sin(\check{S}_0)}} \cdot \tan \left(\frac{\check{S}_0}{2} + 45^0 \right) \right) - 45^0 \right), \quad (4.8)$$

$$R_0 = k' \cdot \frac{a_{Bessel} \cdot \sqrt{1-e^2}}{1-e^2 \cdot \sin^2(\varphi_0)} \cdot \cot(\check{S}_0)$$

pričom v rovnici (4.8) vystupujú ešte R, D' ktoré dostaneme jednoducho zo zadaných rovinných súradníc y, x zo vzťahov

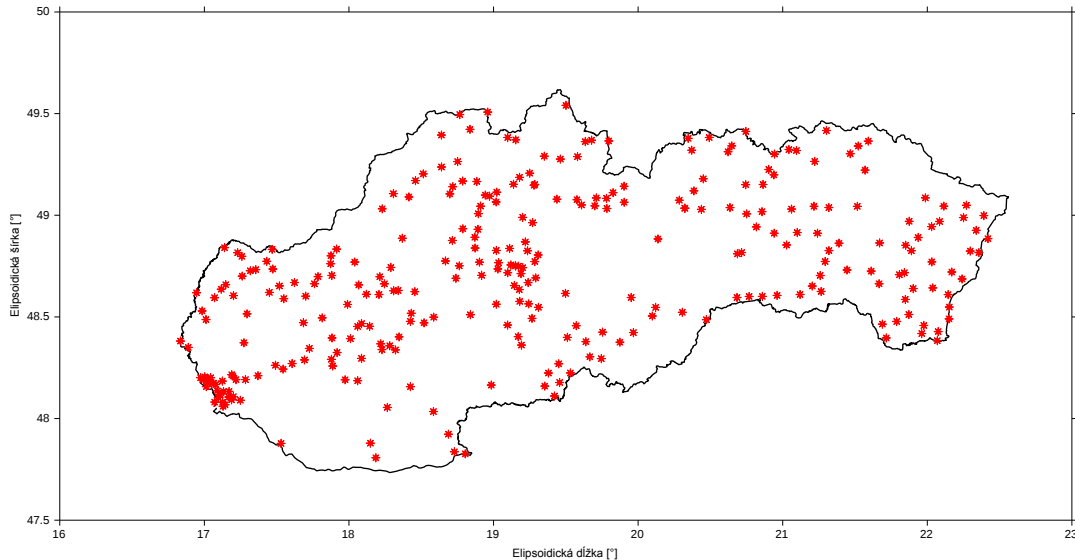
$$R = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$D' = \arctan \left(\frac{y}{x} \right). \quad (4.9)$$

5. PREPOČET ELIPSOIDICKEJ VÝŠKY h NA NORMÁLNU NADMORSKÚ VÝŠKU H_{Bpv} A SPÄŤ VYUŽITÍM DIGITÁLNEHO VÝŠKOVÉHO REFERENČNÉHO MODELU

Elipsoidické výšky h určované pomocou technológie GNSS sú definované ako geometrické odľahlosti bodov od povrchu referenčného elipsoidu merané po normále. Na transformáciu

týchto elipsoidických výšok na normálne nadmorské výšky do systému Baltského po vyrovnaní je možné používať Digitálny výškový referenčný model – verzia 05.2005 (DVRM05). Detailný postup výpočtu DVRM05 je popísaný v (Klobušiak a kol., 2005). Pri tvorbe DVRM05 na pracovisku GKÚ Bratislava išlo o spresnenie dodaného kvázigeoidu GMSQ03B (Mojžeš a kol., 2003) pomocou jeho nafitovania na 304 bodov (viď. obr. 5.1) triedy C ŠPS.



Obr.5.1 Rozloženie identických bodov použitých na výpočet DVRM05.

Na identických bodoch (obr.5.1) boli známe presné hodnoty elipsoidických výšok v systéme ETRS89 (ETRF2000) a zároveň aj normálne výšky v systéme Bpv určené vyrovnaním nivelačných meraní. Na fitovanie bola vybraná len taká skupina bodov triedy C ŠPS, na ktorých boli z dôvodov určenia priestorovej polohy uskutočnené minimálne dve nezávislé 6-hodinové statické observácie, čím bola minimalizovaná nepresnosť v určení elipsoidických výšok. Samotný výpočet DVRM05 bol potom vykonaný v softvéri DTplus (Klobušiak, 1995-2006) a jeho výsledok je zobrazený na obr. 5.2. Prepočet elipsoidickej výšky h na normálnu výšku H_{Bpv} dostaneme pomocou DVRM05 nasledovne:

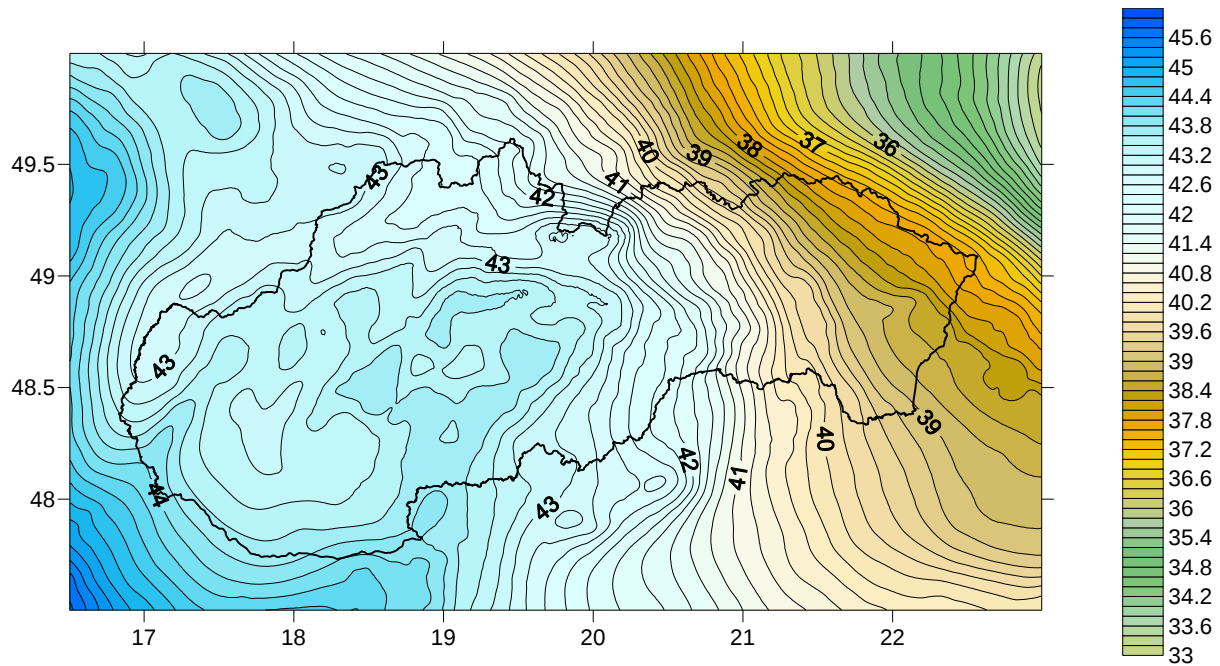
$$H_{Bpv} = h - h_{DVRM} \quad (5.1)$$

kde

h_{DVRM} predstavuje výšku DVRM05 nad referenčným elipsoidom GRS80 v konkrétnom bode definovanom elipsoidickými súradnicami φ, λ

Pre opačný prípad – výpočet elipsoidickej výšky h vzťahnutej ku elipsoidu GRS80 z normálnej nadmorskej výšky H_{Bpv} platí vzťah

$$h = H_{Bpv} + h_{DVRM} \quad (5.2)$$



Obr.5.2 Digitálny výškový referenčný model verzia 05.2005,
prevzaté z (Klobušiak a kol., 2005).

DVRM05 je možné získať zakúpením na GKÚ v Bratislave v tvare integrovateľnom priamo do rôznych značiek geodetických prijímačov GNSS.

ZÁVER

Cieľom tejto technickej správy bolo komplexne popísať vzťah systémov ETRS89 a S-JTSK, a tým napomôcť širšej odbornej verejnosti lepšie pochopiť vzťah súradnicového Systému Jednotnej trigonometrickej siete katastrálnej k Európskemu terestrickému referenčnému systému 1989. V správe je preto podrobnejšie popísaný odhad transformačných parametrov medzi elipsoidmi GRS80 a Bessel 1841 a následný proces tvorby realizácie JTSK03, ale aj jej vzťah k pôvodnej realizácii JTSK. Správa jasne dokazuje, že realizácia JTSK03 je matematicky jednoznačne prepojená s realizáciou ETRF2000, ale aj s pôvodnou realizáciou JTSK.

Poznámka

Autor technickej správy sa pri tvorbe inšpiroval Technickou správou č. 1147/2009 Realizace S-JTSK05 (Kostecký a kol., 2009).

LITERATÚRA

Abelovič J. (1990): *Vyššia geodézia. II. Časť*. SVŠT, Bratislava, december 1990, 223s. ISBN 80-227-0314-1.

Dach R., Hugentobler U., Fridez P., Meindl M., (eds) (2007): *Bernese GPS Software Version 5.0*. Astronomical Institute, University of Berne, 612s.

- Daniš M. – Val'ko J. (1988): *Matematická kartografia. Praktické úlohy, tabuľky*. SVŠT, Bratislava, apríl 1988, 295s.
- Droščák B. (2008): *Stanice SKPOS z pohľadu časových radov*. In CD zborník referátov z medzinárodnej konferencie „70 rokov SvF STU“, SvF STU, 4-5.12.2008, Bratislava. ([http://www.gku.sk/docs/referaty/2008/Droscak Stanice SKPOS casove rady DOC.pdf](http://www.gku.sk/docs/referaty/2008/Droscak%20Stanice%20SKPOS%20casove%20rady%20DOC.pdf))
- Droščák B. (2009a): New determination of SKPOS reference frame. Interný dokument GKÚ Bratislava, november 2011. (nepublikované)
- Droščák B. (2009b): *SKTRF2009 – geokinematika Slovenska*. In. Zborník referátov z konferencie „Globálne navigačné družicové systémy ako efektívny prostriedok na určovanie priestorovej polohy – Tatry 2009“, SSGK, ÚGKK, SvF STU a GKÚ Bratislava, 29-30.9.2009, Tatranská Lomnica. ([http://www.gku.sk/docs/referaty/2009/Droscak SKTRF2009.pdf](http://www.gku.sk/docs/referaty/2009/Droscak_SKTRF2009.pdf))
- Droščák B. (2010): Výpočet nových súradníc bodov Štátnej priestorovej siete v systéme ETRS89. Predbežná technická správa. GKÚ Bratislava, február 2010. (nepublikované)
- Droščák B. – Ferianc D. (2010): *First results and experience from determination of the new Slovakian ETRS89 reference frame - SKTRF09*. Prezentácia na výročnom EUREF 2010 sympóziu, 2-5.6.2010, Gävle, Švédsko.
- EPSG (2004): *Coordinate conversion and transformations including formulas*. Guidance Note number 7, part 2. EPSG, october 2004. Dokument dostupný na <http://www.epsg.org/guides/docs/G7-2.pdf>.
- Hefty J. – Husár L. (2003): *Družicová geodézia. Globálny polohový systém*. STU, Bratislava 2003, 186s. ISBN 80-227-1823-8.
- Charvát O. (1960): *Výbudování jednotné trigonometrické sítě na území Československé republiky*. Geodetický a kartografický obzor č.3/1960. s. 45-50.
- Leitmannová K. – Havlíkova E. (2005): *Slovenský terestrický referenčný rámec 2005 a vývoj jeho stability*. Technická správa. GKÚ. Bratislava, december 2005. (nepublikované)
- Leitmannová K. – Klobušiak M. – Ferianc D. (2005): *Realizácia SKTRF 2005*. In. CD zborník referátov „Geodetické siete a priestorové informácie“, SSGK pri GKÚ a TOPU Banská Bystrica, 24-26.10.2005, Podbanské.
- Kostecký J. – Cimbálik M. – Čepek A. – Filler V. – Kostecký Ja. – Nágl J. – Pešek I. (2009): Realizace S-JTSK/05. Technická zpráva č.1147/2009
- Klobušiak M. (1995-2001): *WIGS – Integrované geodetické siete, transformácie, spájanie, porovnávanie, výpočet rýchlosti bodov a transformácie S-JTSK do xTRSY, odhad parametrov FCA*. [Programový systém WIGS 5.2001.1]. Bratislava, VÚGK & MaKlo. (nepublikované)

- Klobušiak M. (1995-2006): *DTplus – Programový systém na deterministické prevody a transformácie geodetických bodov a GIS objektov*. MaKlo. (nepublikované)
- Klobušiak M. – Leitmannová K. – Ferianc D. (2005): *Realizácia záväzných transformácií národných referenčných súradnicových a výškového systému do Európskeho Terestrického Referenčného Systému 1989*. In. CD zborník referátov „Geodetické siete a priestorové informácie“, SSGK pri GKÚ a TOPU Banská Bystrica, 24-26.10.2005, Podbanské. (<http://www.gku.sk/docs/referaty/2005/Klobusiak.pdf>).
- Klobušiak M. – Leitmannová K. – Ferianc D. (2006): *S-JTSK a ETRS89: odhad transformačných parametrov metódou transformácie na povrchu elipsoidu stotožnením normál*. In. zborník referátov z odbornej konferencie s medzinárodnou účasťou „GPS+GLONASS+Galileo: nové obzory geodézie“. KGZ SvF STU, 8.november.2006, Bratislava. (http://www.gku.sk/docs/referaty/2006/LKTS_KL.pdf)
- Mojzeš, M. – Janák, J. – Papčo, J. (2003): *Určenie gravimetrického kvázigeoidu SR, verzia 2003 s použitím vyšších členov v rozvoji poruchového potenciálu*. Vedecko – technický projekt „Integrovaná geodetická sieť“, čiastková úloha č.1 „Rozvoj integrovaných geodetických základov Slovenska“. VÚGK.