

Endelig tilpasning af Færø geoiden til GPS og nivellement/vandstand: FOGEOID2011

*Rene Forsberg
 Geodynamikafdelingen, DTU-Space
 3 Okt / 17 Okt 2011*

Dette notat giver baggrund for den endelige tilpasning af den gravimetriske geoide på Færøerne, baseret på nivellement, GPS og vandstandsmålinger. Den tilpassede geoidemodel – FOGEOID2011 – repræsenterer den endelige udnyttelse den ”gravimetriske geoide” baseret på satellitdata, tyngdekraft data og digitale terrænmodeller, se notat [1], tilpasset til de lokale GPS og nivellementsmaalinger, se notat [2].

Tilpasning af geoiden beregnet fra tyngde-, højde- og satellitdata (*”fo_geoid10”*) foretages med *mindste kvadraters kollokation*. Dette er en optimal estimerings metode, og er en variant af Kriging. I metoden udnyttes at geoidehøjder udover den klassiske gravimetriske metode, også kan bestemmes ved

$$N^{\text{GPS}} = h^{\text{GPS}} - H \quad (1)$$

hvor H er den nivellerede højde, og h^{GPS} ellipsoidehøjden fra GPS. Geoidehøjder bestemt på denne måde refererer til et lokalt højdesystem, og kan ikke uden videre sammenlignes med den gravimetriske geoide, som principielt refererer til et globalt system. Geoidehøjder beregnet med (1) vil direkte indeholde fejl i nivellement, GPS (f.eks. antennehøjdefejl) og effekter fra landhævning.

For at få en geoide som kan benyttes i praksis til GPS, må der derfor tilpasses en empirisk ”interpolationsflade”

$$\varepsilon = N_{\text{grav}} - N^{\text{GPS}} \quad (2)$$

således at den endelige tilpassede geoide opnås ved

$$N^{\text{tilpasset}} = N + \varepsilon \quad (3)$$

Fladen ε interpoleres i kollokation ved at estimere en konstant samt en residual korrektion, som beskrives med en 2. ordens Markov kovariansfunktion af form

$$C_{\varepsilon\varepsilon}(s) = C_0(1+\alpha s)e^{-\alpha s} \quad (4)$$

hvor s er afstanden, α er en konstant som beskriver *halveringslængden* af signalet, og C_0 variansen. Metoden virker i praksis som en ”trade-off” mellem glathed af ε -fladen, og den eksakte fit af geoiden i de givne GPS-nivellementsmaalinger. Metoden er i praksis implementeret i GRAVSOFTE pakken i et nyudviklet programmodul *fitgeoid* som primært bygger på kollokationsmodul *geogrid*.

Referencer

- [1] Forsberg, R.: Ny Gravimetrisk Geoide for Færøerne. DTU-Space Notat, April 2010.
- [2] Engsager, K.: Koter til anvendelse i definition af FVR09 og tilpasning af geoide. KMS notat, August 2011.
- [3] Forsberg, R and C C Tscherning: Overview manual for the GRAVSOFTE Geodetic Gravity Field Modelling Programs, 2nd Ed. Technical report, DTU-Space, August 2008.

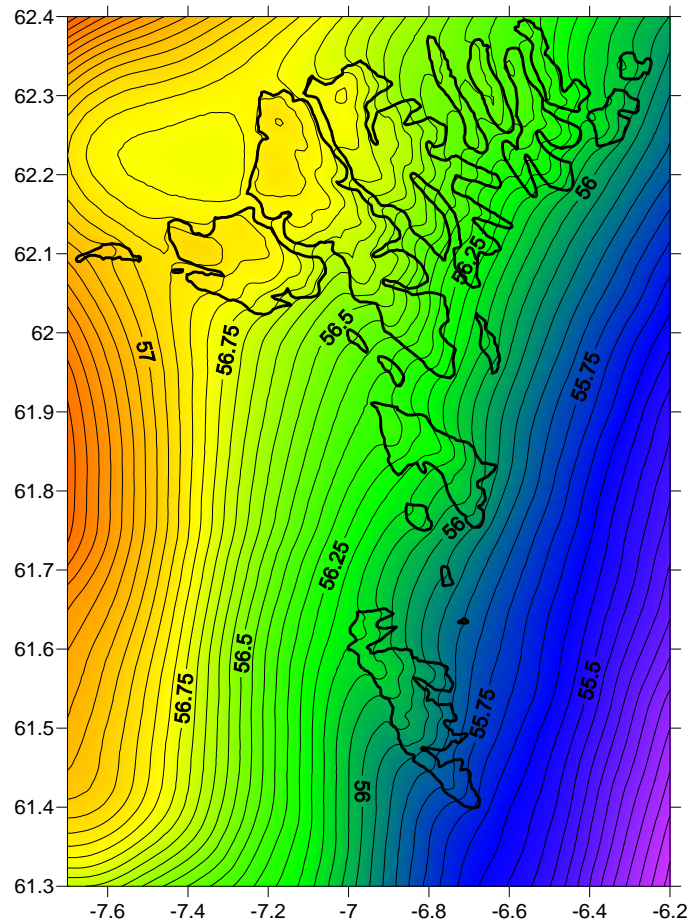


Fig. 1. Den gravimetriske geoid brugt til tilpasning: fo_geoid10. Vist med 5 cm kontur interval.

Tilpasning af den Færøske geoid – data og resultater

Der er modtaget 3 sæt filer til tilpasning fra KMS udjævningssystem. Filerne er kommet med formelle fejlestimer fra udjævning. Hvert fil-sæt består af 2 filer med henholdsvis ellipsoidehøjder og koter. Fra filerne er der beregnet observerede GPS-geoidhøjder ved (1). De tre sæt filer dækker:

- 1) Punkter med nivelleret kote og GPS, samt fejlskøn. GPS-fejlskøn varierer fra 1 mm til 6 cm, nivellement fejlskøn er under 5 mm.
- 2) Punkter med koter fra vandstandsmåling og GPS, fejlskøn angivet som ca. 2 cm.
- 3) Punkter med koter fra zenith distancer, fejlskøn varierer fra 3 til 19 cm for zd-koter, og næste tilsvarende fra GPS.

De modtagne data er angivet i Appendix A, sammen med residualer fra den endelige geoidtilpasning.

Der er eksperimenteret en hel del med forskellige geoidtilpasninger, med både ”hård” og ”blød” tilpasning. Der er anvendt den angivne fejlestimat som apriori fejl ved N-værdierne, dog med en minimal apriori fejl σ på typisk 2-3 cm, for at undgå de helt urealistisk lave mm-niveau

fejlestimer. Fig. 2-3 viser korrektionsfladen ε fra en tilpasning baseret på nivellement og vandstandsmåling med a priori minimumfejl σ på 3 cm, og korrelationslængde 50 km, svarende til en "blød" tilpasning. Det ses fra figurerne at der er problemer med bias i vandstandsmålinger (de er næppe mere nøjagtige end 5 cm, samt problemer med GPS måling ved Kollafjörður.

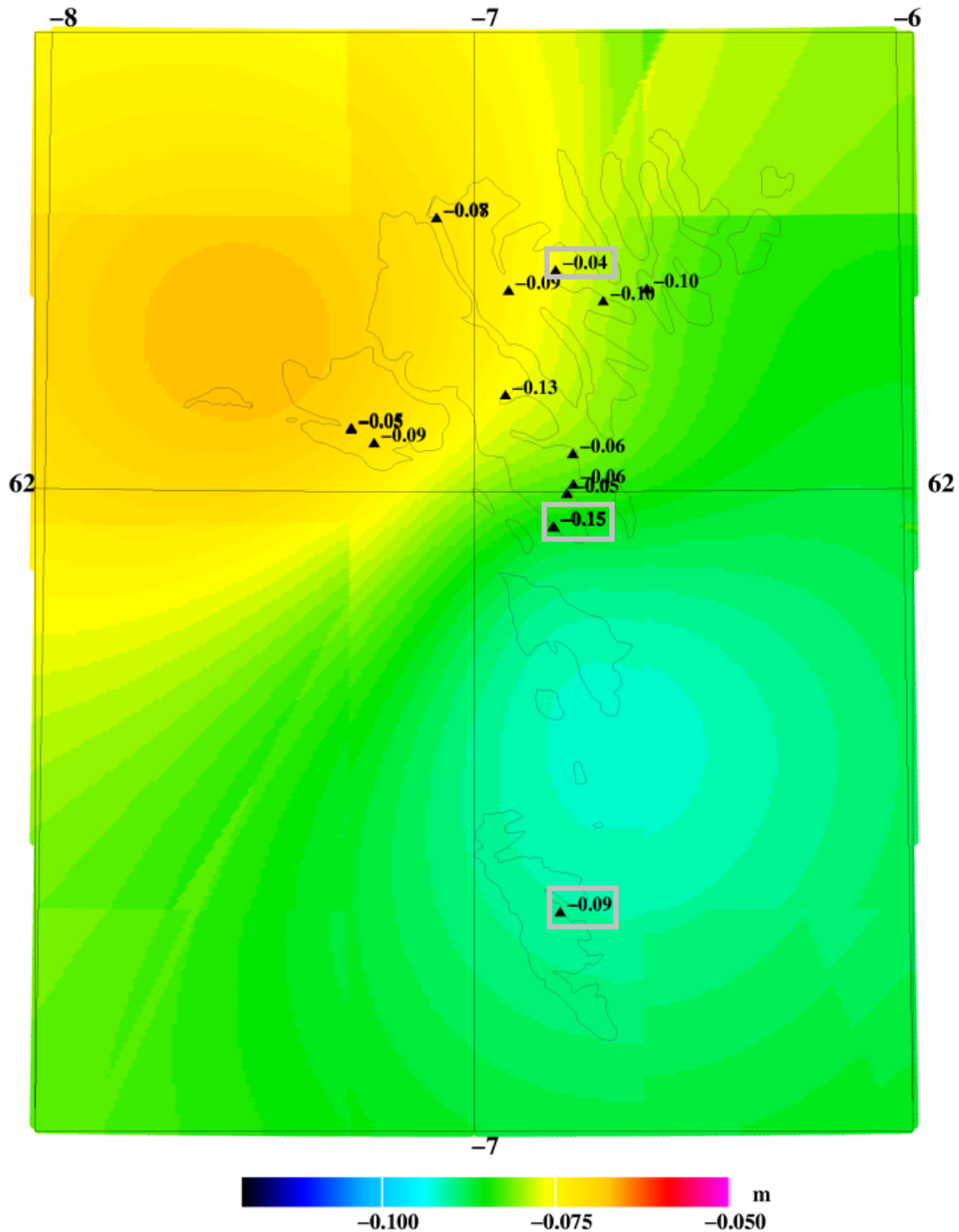


Fig. 2. N -observationer (difference $N - N_{Fogeooid10}$) samt korrektionsfladen for nivellement og vandstandsmålinger. De går firkanter viser vandstandsmålingerne, som tilsyneladende har et bias i Fuglafjörður og Gamlarætt. Alene vandstandsmålingen på Suderoy er derfor benyttet til den endelige geoide.

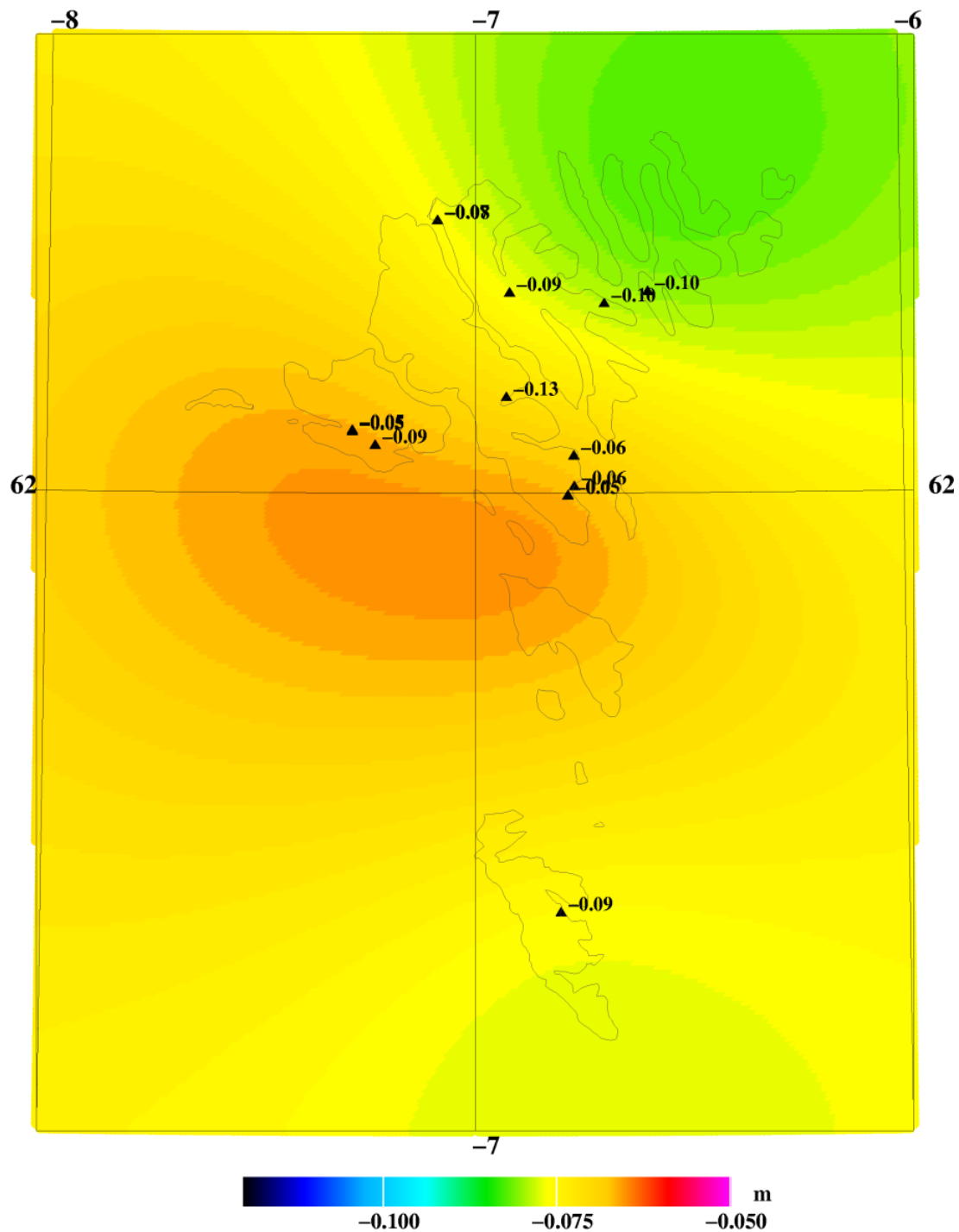


Fig. 3. N-observationer samt korrektionsfladen for nivellement og kun vandstandsmåling på Suderoy, med GPS punktet 19761 Kollafjördur slettet (dette GPS punkt har en apriori GPS fejl på 6 cm, og giver en tilsvarende anomal observation i N). Dette er plottet svarende til den endelige geoidetilpasning FOGEOID2011.

Fig. 4 og 5 viser differencerne mellem geoidenhøjder fra zenith-distancekoter og *fogeoid10* geoiden, samt den tilhørende interpolationsflade. Det ses at zenithdistancerne har bias i forhold til nivellementet, og at deres nøjagtighed generelt ikke er bedre en omkring 5 cm.

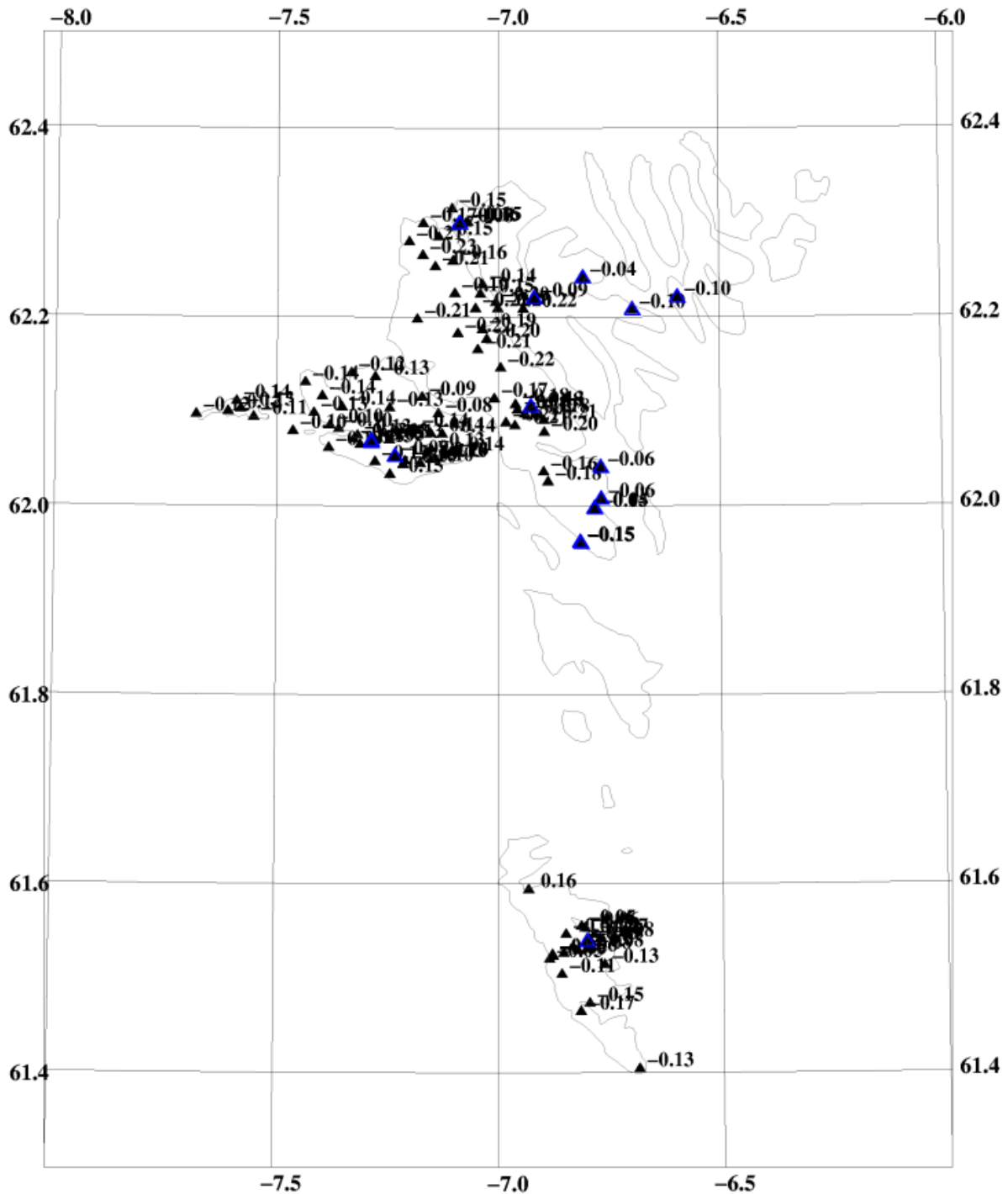


Fig. 4. Differencer (m) mellem N fra GPS-zenithdistancer og den gravimetriske geoid "fogeoid10".
 Blå-markerede punkter er nivellerede punkter og vandstandsobservationer.

På grund af den relativt store fejl på zenithdistancerne, er den endelige geoidtilpasning derfor alene foretaget på nivellamentsdata + den enlige vandstandsmåling på Suderoy, d.v.s. med en korrektionsflade svarende til Fig. 3. Det er valgt at medtage Suderoy vandstandsmålingen da distancen til Suderoy er så lang, at der næppe kan forventes en bedre geoidoverførsel end med vandstandsmålingen.

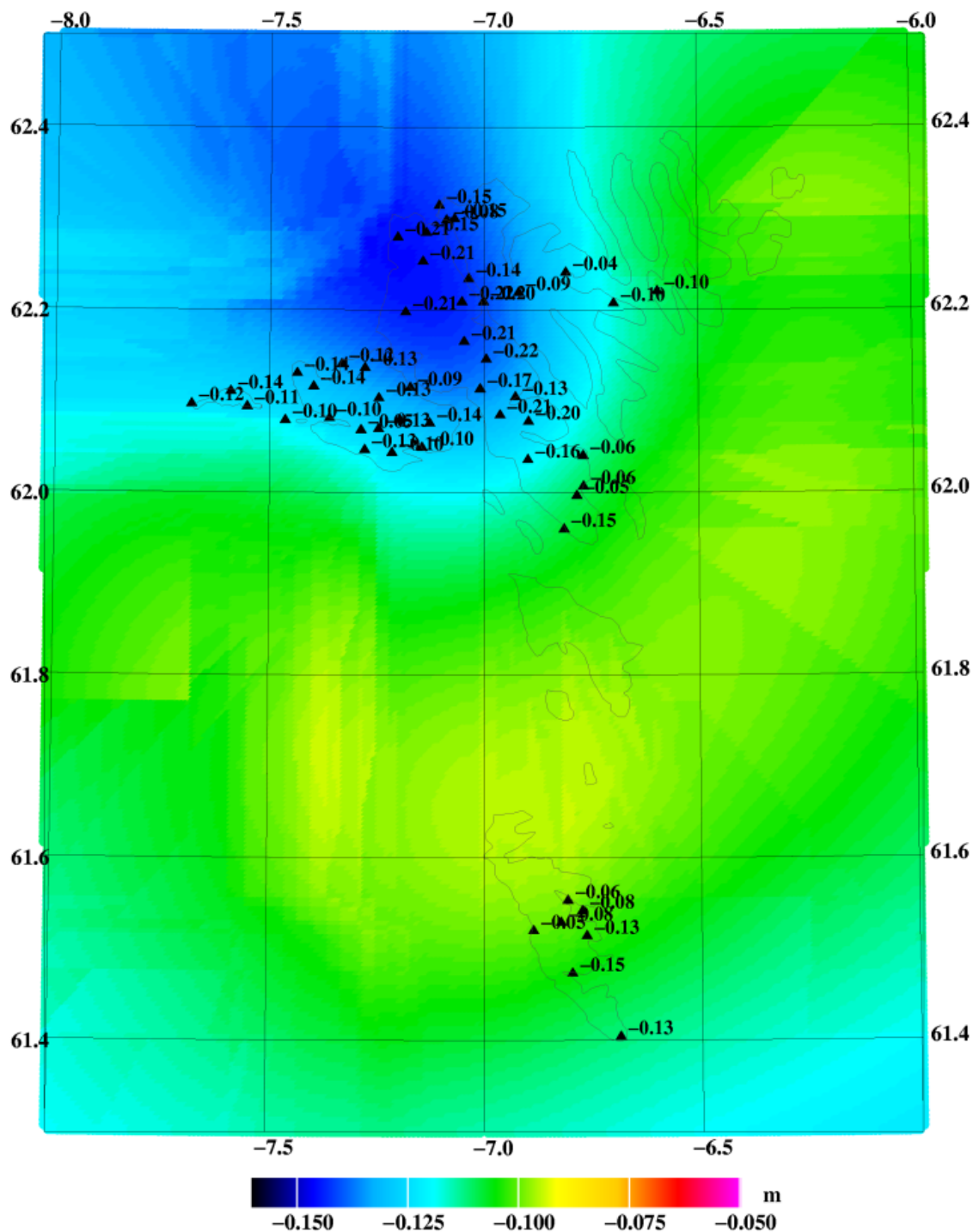


Fig.5. Differencer og tilpasningsflade for punkterne vist i Fig. 4. For overskuelighed er kun N-data punkter udtyndet til ca. 5 km indbyrdes afstand vist. Bemærk forskellen i skala i forhold til Fig. 2 og Fig. 3.

Sammenligninger mellem a priori og post-fit fejl er vist i Tabel 1 for de forskellige kotesæt. Tabellen bekræfter at geoiden på de nordlige øer sandsynligvis har en nøjagtighed omkring 2 cm, konsistent med den forventede nøjagtighed. Zenithdistancer og vandstandsmålinger er derfor ikke nøjagtige nok til at forbedre geoiden, og det er derfor at tilpasningen alene er foretaget på nivellement og Suderoy vandstandsmålingen (zenith-distance N-værdier er konsistente her).

Tabel 1. Sammenligning mellem GPS-bestemte N-værdier og de forskellige geoider

Enhed: m	Antal pkt	Middelværdi	Std.afv.
N-obs fra nivellement minus <i>fogeid10</i>	15	-0.074	0.025
<i>Som ovenfor, efter fit</i>		-0.003	0.022
N-obs fra nivellement - <i>fogeid10</i> , undt Kollafj	14	-0.070	0.021
<i>Som ovenfor, efter fit</i>		-0.001	0.018
N-obs fra alle data minus <i>fogeid10</i>	109	-0.131	0.051
<i>Som ovenfor, efter fit</i>		-0.004	0.039
Forskæl N (fra zd) minus FOGEOID2011			
<i>Hele området (som Fig. 5 – excl. Hvalba)</i>	91	-0.072	0.048
<i>Kun Suderoy</i>	19	-0.004	0.039

Den endelige tilpassede Færøske geoidemodel – FOGEOID2011 – er vist i Fig. 6 og 7, og er tillige tilgængelig med interpolationsprogrammet ”*grid_int*”. Geoidefilen er givet i GRAVSOFTE grid format med ca. 500 m opløsning (0.005° x 0.01°). GRAVSOFTE gridformatet er defineret af en label efterfulgt af Ø-V rækker fra N til S, se ref [3].

Resume

Den endelige GPS tilpasning af geoiden er alene foretaget til nivellement samt vandstandsmålingen på Suderoy. Tilpasningen viser en konsistent på bedre end 2 cm på de centrale øer.

Det bør overvejes at gemåle 19761 Kollafjörður med GPS, da dette punkt sandsynligvis er fejlmålt (og af samme grund ikke er brugt i tilpasningen)

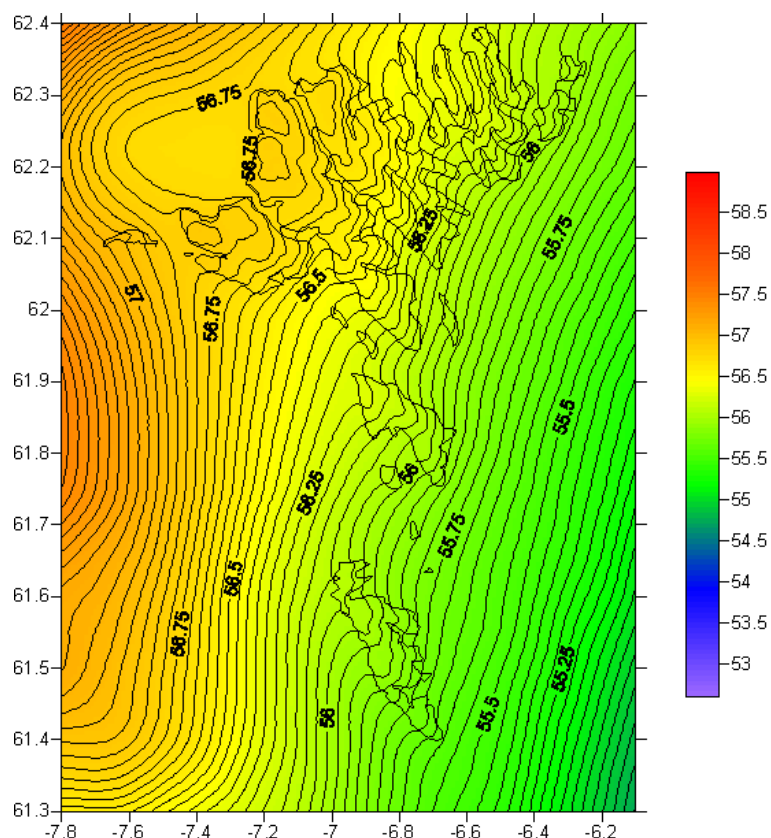


Fig. 6. FOGEOID2011. 5 cm konturinterval

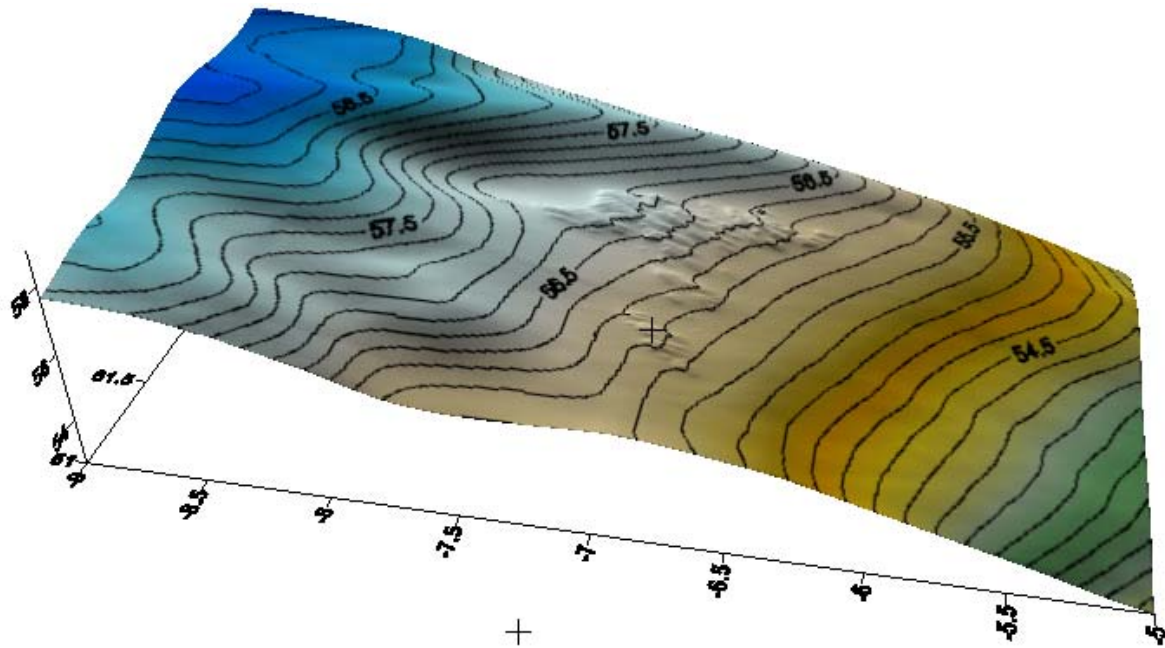


Fig. 7. FOGEOID2011 i hele dækningsområdet. Fjeldenes indflydelse på topografien ses tydeligt.

Appendix 1. Geoide data fra nivellement, vandstand og zenith distancer, samt residualer

Navn/nr	LAT	LON	H	h-ell	N	sig	post-fit
<i>Nivellement</i>							
SORV 101	62.06730	-7.28688	82.846	139.634	56.788	0.000	0.021
TORH 102	62.00746	-6.76839	2.246	58.453	56.207	0.000	0.008
ARGI 103	61.99737	-6.78353	53.975	110.211	56.236	0.000	0.015
KLAK 104	62.22123	-6.59477	143.771	199.966	56.195	0.000	-0.024
14818	62.05277	-7.23321	39.854	96.537	56.683	0.030	-0.026
19761	62.10530	-6.92659	33.327	89.779	56.452	0.060	-0.061
19815	62.06908	-7.28689	89.810	146.600	56.790	0.010	-0.020
19878	62.20791	-6.69700	39.768	96.038	56.270	0.000	-0.024
19886	62.21987	-6.91904	104.720	161.305	56.585	0.010	-0.016
ARG1 105	61.99757	-6.78322	41.009	97.244	56.235	0.000	0.014
ARG3 106	61.99728	-6.78385	42.156	98.391	56.235	0.000	0.013
EID1 107	62.29906	-7.08782	34.765	91.466	56.701	0.000	-0.003
EIDI 108	62.29920	-7.08833	34.493	91.201	56.708	0.010	0.004
HVIT 109	62.04109	-6.76932	42.636	98.871	56.235	0.000	0.007
<i>Vandstandsmålinger</i>							
TVOR 201	61.53945	-6.80227	51.385	107.229	55.844	0.000	-0.020
FGL2 202	62.24181	-6.80865	3.210	59.701	56.491	0.010	0.038
GLR1 203	61.96053	-6.81369	30.573	86.701	56.128	0.000	-0.083
GLR2 204	61.96162	-6.81574	3.325	59.454	56.129	0.010	-0.086
<i>Zenithdistancer</i>							
15802802	62.21595	-7.00611	21.932	78.455	56.523	0.050	-0.127
15802804	62.29993	-7.07390	175.150	231.773	56.623	0.170	-0.081
15906811	62.18727	-7.03596	11.853	68.409	56.556	0.120	-0.118
16003004	62.09731	-7.68223	134.253	191.205	56.952	0.180	-0.053
16005009	62.07975	-7.46351	67.054	123.857	56.803	0.120	-0.039
16201803	61.52570	-6.87961	18.074	74.025	55.951	0.060	0.011
16201804	61.52386	-6.87951	6.820	62.765	55.945	0.090	0.008
16201805	61.52388	-6.87863	9.505	65.429	55.924	0.140	-0.013
16202806	61.54255	-6.77390	14.163	69.979	55.816	0.100	-0.011
16202815	61.55573	-6.81498	17.351	73.263	55.912	0.050	0.021
16202816	61.55550	-6.81451	8.631	64.531	55.900	0.050	0.010
16202817	61.54207	-6.79806	15.697	71.558	55.861	0.040	0.002
14017	62.31511	-7.10506	341.594	398.221	56.627	0.060	-0.077
14121	61.51516	-6.76363	399.615	455.384	55.769	0.050	-0.054
14159	61.40473	-6.68682	235.598	291.180	55.582	0.020	-0.053
14212	62.02613	-6.88790	473.586	529.886	56.300	0.050	-0.115
14223	62.07853	-6.89631	498.372	554.727	56.355	0.070	-0.136

14226	62.08554	-6.96250	614.247	670.670	56.423	0.050	-0.141
14227	62.08854	-6.98299	763.152	819.586	56.434	0.070	-0.142
142271	62.08874	-6.98306	763.161	819.594	56.433	0.060	-0.143
14229	62.07660	-7.12671	683.494	740.109	56.615	0.060	-0.074
14230	62.11411	-7.00916	620.102	676.621	56.519	0.050	-0.104
14232	62.14663	-6.99481	646.231	702.738	56.507	0.060	-0.152
14239	62.22543	-7.09841	536.629	593.278	56.649	0.090	-0.122
14240	62.18303	-7.09150	595.681	652.294	56.613	0.070	-0.150
14241	62.20953	-7.05165	449.029	505.595	56.566	0.070	-0.146
14242	62.17700	-7.02632	383.757	440.311	56.554	0.070	-0.130
14247	62.25984	-7.10269	398.028	454.707	56.679	0.060	-0.083
14248	62.25377	-7.14275	637.929	694.604	56.675	0.070	-0.138
14249	62.28522	-7.13507	468.945	525.633	56.688	0.060	-0.081
14255	62.19818	-7.18324	756.880	813.565	56.685	0.080	-0.141
14264	62.14149	-7.33149	502.159	558.896	56.737	0.090	-0.053
14265	62.13721	-7.27782	589.890	646.641	56.751	0.080	-0.063
14273	62.10399	-7.24532	406.683	463.419	56.736	0.090	-0.067
14277	62.06221	-7.38274	515.040	571.803	56.763	0.070	-0.062
14278	62.03385	-7.24442	252.626	309.230	56.604	0.070	-0.086
14279	62.13139	-7.43606	721.646	778.411	56.765	0.100	-0.075
14281	62.10334	-7.58174	559.930	616.802	56.872	0.130	-0.065
14286	62.09904	-7.41649	462.460	519.253	56.793	0.090	-0.063
14296	62.28007	-7.20193	672.473	729.155	56.682	0.080	-0.137
14297	62.20894	-6.94369	698.503	755.002	56.499	0.020	-0.152
14305	62.08204	-7.18785	676.650	733.342	56.692	0.070	-0.073
14306	62.04738	-7.27821	300.704	357.380	56.676	0.040	-0.068
14307	62.10509	-7.35293	618.246	675.046	56.800	0.090	-0.069
14308	62.04575	-7.17659	4.052	60.660	56.608	0.060	-0.038
14309	62.04814	-7.21122	59.557	116.163	56.606	0.070	-0.078
14324	62.05092	-7.14286	96.392	152.953	56.561	0.080	-0.067
14325	62.07717	-7.15262	140.700	197.334	56.634	0.100	-0.071
14327	62.06556	-7.31175	94.437	151.156	56.719	0.040	-0.065
14328	62.07527	-7.31754	51.983	108.714	56.731	0.040	-0.066
14329	62.06102	-7.15182	81.482	138.086	56.604	0.070	-0.059
14349	61.50475	-6.85853	569.308	625.209	55.901	0.050	-0.033
14815	61.52687	-6.85461	461.800	517.752	55.952	0.050	0.014
14816	62.08226	-7.36056	23.522	80.316	56.794	0.020	-0.032
14817	62.07093	-7.32622	2.330	59.062	56.732	0.040	-0.065
14819	62.07056	-7.27803	104.433	161.130	56.697	0.040	-0.068
14820	62.04425	-7.21456	43.470	100.109	56.639	0.020	-0.039
14821	62.05002	-7.15144	2.442	59.013	56.571	0.080	-0.060
14822	62.09824	-7.13524	85.171	141.851	56.680	0.080	-0.009
14827	62.08586	-7.38012	29.904	86.706	56.802	0.060	-0.032
14828	62.11556	-7.17207	1.798	58.504	56.706	0.020	-0.019
14829	62.11669	-7.39760	713.484	770.278	56.794	0.090	-0.077
14830	62.11111	-7.59091	462.282	519.141	56.859	0.130	-0.073
14831	62.10050	-7.61027	363.670	420.571	56.901	0.140	-0.055
14832	62.09465	-7.55244	350.036	406.894	56.858	0.130	-0.044
14833	62.05688	-7.10794	591.189	647.746	56.557	0.070	-0.069
14834	62.04999	-7.14440	74.472	131.064	56.592	0.060	-0.035
14837	62.07035	-7.24598	48.036	104.715	56.679	0.060	-0.068
14839	61.54703	-6.84957	442.070	498.053	55.983	0.040	0.036
14840	61.59441	-6.93235	1.225	57.477	56.252	0.070	0.228
14841	61.52973	-6.82280	64.776	120.661	55.885	0.040	-0.009
14842	61.53169	-6.79635	48.457	104.304	55.847	0.030	-0.008
14846	61.55394	-6.80725	1.456	57.346	55.890	0.030	0.010
14858	61.52076	-6.88627	24.725	80.678	55.953	0.020	0.018
14903	62.30029	-7.06907	167.077	223.704	56.627	0.100	-0.077
19739	62.20951	-7.00119	20.072	76.587	56.515	0.010	-0.129
19742	62.22488	-7.04045	2.138	58.742	56.604	0.040	-0.078
19743	62.23490	-7.03569	32.181	88.790	56.609	0.040	-0.071
19760	62.10199	-6.95709	6.619	63.058	56.439	0.050	-0.107
19762	62.09727	-6.91537	28.893	85.286	56.393	0.050	-0.108
19763	62.09791	-6.94013	3.334	59.756	56.422	0.050	-0.103
19764	62.10791	-6.96124	65.217	121.667	56.450	0.060	-0.108
19768	62.16589	-7.04632	745.217	801.809	56.592	0.050	-0.139
19769	61.47412	-6.79696	48.563	104.302	55.739	0.010	-0.075
19772	62.10386	-6.93012	37.176	93.586	56.410	0.060	-0.107
19779	61.54695	-6.78652	41.765	97.611	55.846	0.030	-0.002
19796	61.46538	-6.81661	181.093	236.813	55.720	0.050	-0.099
19803	62.26579	-7.17108	764.104	820.775	56.671	0.070	-0.161
19804	62.29926	-7.17031	467.285	523.959	56.674	0.070	-0.101
19861	62.03670	-6.89780	534.674	591.022	56.348	0.050	-0.091
19864	62.09122	-6.89734	577.552	633.916	56.364	0.070	-0.140
ARG4 301	61.99756	-6.78359	40.823	96.970	56.147	0.010	-0.074