



**INSTITUTO NACIONAL DE ESTADÍSTICA GEOGRAFÍA E INFORMÁTICA
DIRECCIÓN GENERAL DE GEOGRAFÍA**

“TÉCNICA PARA LA SOLUCIÓN GEOIDAL EN EL ÁREA MEXICANA”

DIRIGIDO A:

**ESPECIALISTAS EN EL MANEJO DE
INFORMACIÓN GEODÉSICA.**

POR: LMA. DAVID ÁVALOS NARANJO

Marzo de 2006

TÉCNICA PARA LA SOLUCIÓN GEOIDAL EN EL ÁREA MEXICANA

El presente documento describe de manera breve y general el procedimiento con el que se obtuvo el Geoide Gravimétrico Mexicano para el área mexicana mediante la técnica Stokes-Helmert. Mayores detalles pueden consultarse en las referencias listadas al final. Dicha técnica es propiedad intelectual de la Universidad de New Brunswick, Canadá, y es aplicada en el México para obtener el modelo geoidal gravimétrico a partir de información de la Base de Datos Geodésica del INEGI.

La siguiente redacción corresponde a la traducción del capítulo 1 del “Reference Manual for the Stokes-Helmert’s Geoid Software”, escrito por Robert Tenzer y Juraj Janak en Fredericton, Canadá, 2001.

DEFINICIONES FUNDAMENTALES

1 Formulación del problema del valor de frontera

La cantidad por resolver es el potencial de la gravedad terrestre sobre y fuera del geoide, representado por W , y el propio geoide. El geoide es la superficie equipotencial que más se aproxima al nivel medio del mar y está representado por $W = W_o = constante$. Para resolver este problema, se introduce un campo de referencia, llamado campo de gravedad normal, generado por el elipsoide de referencia. Se define que el potencial normal U en este elipsoide de referencia sea igual al potencial real en el geoide: $U_o = W_o$.

La diferencia entre el potencial de gravedad real y el potencial normal en un punto arbitrario del espacio tridimensional euclidiano se conoce como potencial perturbador.

$$T = W - U \quad (1.1)$$

Cuando se desprecia la atracción atmosférica, T es armónico fuera de la Tierra y satisface la ecuación de Laplace.

$$\nabla^2 T = 0 \quad (1.2)$$

Una vez resuelto T , se puede obtener el potencial de gravedad W en cualquier punto añadiendo U , que se puede calcular a partir de modelos existentes. También, cuando se conoce T en el geoide, la separación entre el elipsoide de referencia y el geoide se puede obtener a partir de la fórmula de Bruns

$$N = \frac{T_g}{\gamma_o}, \quad (1.3)$$

donde T_g es el potencial perturbador sobre el geoide y γ_o representa el valor de la gravedad normal sobre el elipsoide de referencia. El problema se reduce entonces a la determinación de T sobre y fuera del geoide.

Sin embargo, T no satisface la ecuación de Laplace dentro de las masas topográficas donde el geoide se localiza con frecuencia. Por lo tanto, para establecer la armonicidad del potencial perturbador, se tienen que eliminar o reubicar las masas atmosféricas y topográficas. Esto se realiza con el método de la segunda condensación de Helmert, donde las masas son concentradas en una capa situada sobre el geoide, de modo que la masa total queda invariable. Sin embargo la Tierra y su campo gravitacional cambia ligeramente. El espacio obtenido después de esa condensación se conoce como espacio de Helmert. Las cantidades dadas en el espacio de Helmert se denotan con el superíndice h . El potencial de Helmert se define como sigue:

$$W^h = W - \delta V^t - \delta^a \quad (1.4)$$

donde δV^t es el potencial topográfico residual, que es la diferencia entre el potencial de las masas topográficas y el potencial de la capa de condensación.

$$\delta V^t = V^t - V^{ct} \quad (1.5)$$

De manera análoga, δV^a se define como el potencial atmosférico residual.

$$\delta V^a = V^a - V^{ca} \quad (1.6)$$

Restando el campo de referencia normal U de la ecuación (1.4), el potencial perturbador en el espacio de Helmert viene a ser.

$$T^h = W^h - U \quad (1.7)$$

Como se esperaba, el potencial perturbador de Helmert es armónico en cada punto fuera del geoide, de manera que la ecuación de Laplace

$$\nabla^2 T^h = 0 \quad (1.8)$$

se cumple en cualquier parte fuera del geoide. Para determinar el T^h , se tiene que resolver el problema del valor de frontera de tercer tipo fuera del geoide. Por lo tanto, se necesitan los valores de frontera en el geoide, el cual es desconocido a priori. En este problema, las anomalías de gravedad de Helmert sobre el geoide sirven como valores de frontera. Para encontrar una relación entre el potencial perturbador y las anomalías de gravedad de Helmert, se introduce la derivada radial del potencial perturbador

$$\frac{\partial T^h}{\partial r} = \frac{\partial W^h}{\partial r} - \frac{\partial U}{\partial r}. \quad (1.9)$$

usando una aproximación esférica, se tiene

$$-\frac{\partial T^h}{\partial r} \cong g^h - \gamma = \delta g^h, \quad (1.10)$$

donde δg^h es la perturbación de la gravedad de Helmert. En Vaníček, et. Al., 1999, se sugiere aplicar una corrección elipsoidal a esta aproximación, porque de lo contrario el error en el geoide puede alcanzar más de un centímetro. Entonces, la ecuación (1.10) viene a ser.

$$-\frac{\partial T^h}{\partial r} = \delta g^h - \varepsilon_{dg^h}. \quad (1.11)$$

La perturbación de la gravedad no suele considerarse una cantidad medible en la superficie terrestre. Por lo tanto, se tiene que transformar la perturbación de la gravedad de Helmert a una cantidad más disponible, que es la anomalía de gravedad de Helmert. Esta transformación se obtiene usualmente al añadir un término Γ a la perturbación de la gravedad. Este término explica el cambio en la gravedad normal debido a la diferencia entre la altura geodésica h y la altura ortométrica disponible comúnmente, H^o . Esta expresión se puede escribir con suficiente exactitud como.

$$\Gamma = \frac{T^h}{\gamma} \frac{\partial \gamma}{\partial n}. \quad (1.12)$$

Para resolver el problema del valor de frontera, es conveniente introducir la aproximación esférica de (1.12).

$$1 \frac{\partial \gamma}{\partial n} \cong -\frac{2}{R}. \quad (1.13)$$

El error ocasionado por esta aproximación se conoce como corrección elipsoidal para la aproximación esférica, ε_n .

Asumiendo la ecuación (1.13), la ecuación (1.12) se puede volver a escribir como.

$$-\frac{2}{R} T^h = \Gamma + \varepsilon_n. \quad (1.14)$$

Las ecuaciones (1.11) y (1.14) se pueden combinar para obtener.

$$-\frac{\partial T^h}{\partial r} - \frac{2}{R} T^h = \Delta g^h + \varepsilon_n - \varepsilon_{dg^h}. \quad (1.15)$$

Esta ecuación representa la ecuación fundamental de la geodesia física válida en el espacio de Helmert. Relaciona los valores de frontera conocidos Δg^h al potencial perturbador desconocido fuera y sobre el geoide. Como los valores de frontera son las

anomalías de gravedad de Helmert sobre el geode, en las dos secciones siguientes se verá la derivación de esta cantidad a partir de las mediciones.

2 Evaluación de las anomalías de gravedad de Helmert sobre la superficie terrestre

La anomalía de gravedad de Helmert Δg^h se define como (Vaníček, et. Al., 1999)

$$\Delta g^h = g^h - \gamma_{r=r_i-\zeta^h}, \quad (1.16)$$

donde γ_r es la gravedad normal sobre el teluroide en el espacio de Helmert (figura 1.1).

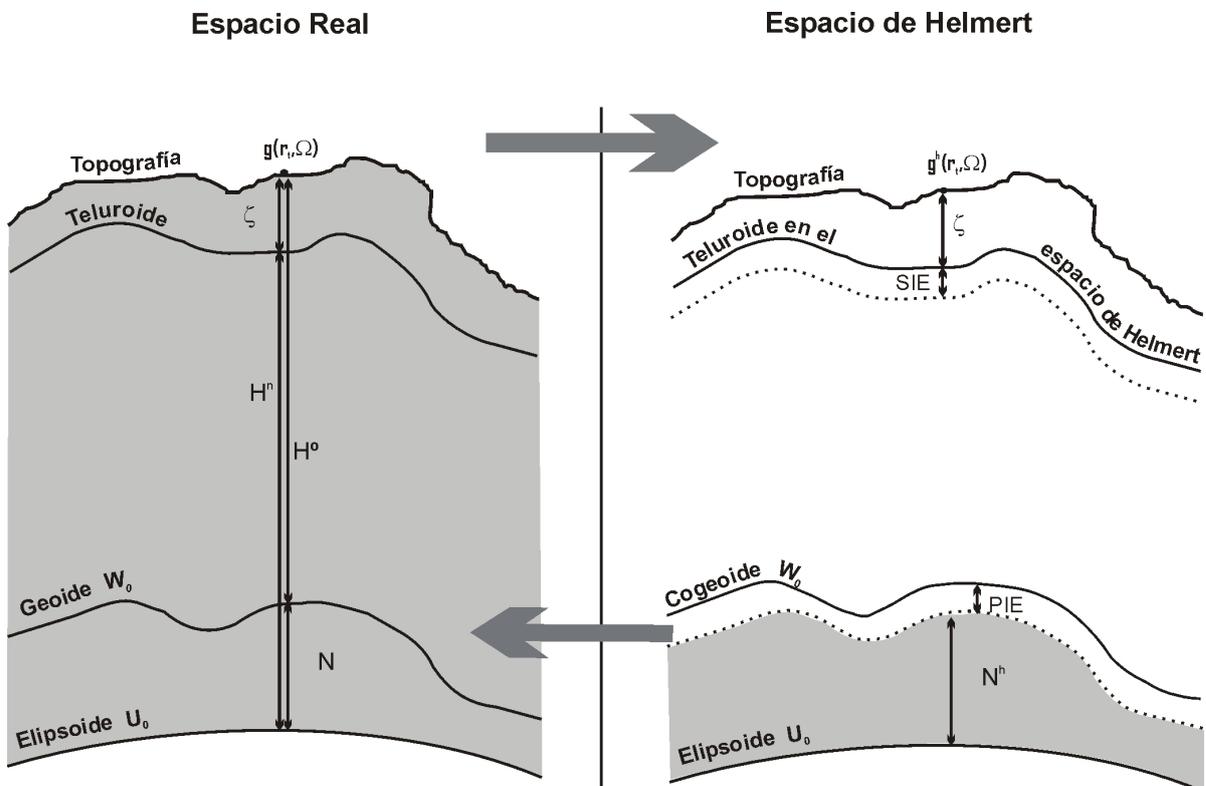


Figura 1.1: Las cantidades involucradas en el espacio real y de Helmert

2.1 Efecto directo sobre la gravedad:

La gravedad de Helmert (g^h) sobre la superficie terrestre se obtiene a partir de la gravedad g observada sobre la superficie terrestre, añadiendo el efecto topográfico directo δA^a :

$$g^h = g + \delta A^t + \delta A^a \quad (1.17)$$

El efecto topográfico directo (DTE: Direct Topographical Effect) sobre la gravedad es la atracción gravitacional de las masas topográficas menos la atracción de las masas topográficas condensadas. Deberá evaluarse sobre la superficie terrestre. De manera análoga, el efecto atmosférico directo (DAE: Direct Atmospheric Effect) sobre la gravedad es la atracción gravitacional de la atmósfera menos la atracción gravitacional de la atmósfera condensada. El efecto directo se obtiene tomando la derivada radial de los potenciales residuales topográfico y atmosférico, ecuaciones (1.6) y (1.7).

$$\delta A^t = \frac{\partial \delta V^t}{\partial r} = \frac{\partial V^t}{\partial r} - \frac{\partial V^c}{\partial r} = A^t - A^{ct}, \quad (1.18a)$$

$$\delta A^a = \frac{\partial \delta V^a}{\partial r} = \frac{\partial V^a}{\partial r} - \frac{\partial V^{ca}}{\partial r} = A^a - A^{ca}. \quad (1.18b)$$

2.2 Corrección para la altura ortométrica:

La gravedad normal sobre el teluroide en el espacio de Helmert, $\gamma_{r=r_i-\zeta^h} = \gamma_{r=r_{o+(H^N)^h}}$,

se obtiene con la continuación ascendente de la gravedad normal en el punto correspondiente sobre el elipsoide de referencia. La altura utilizada para este cálculo deberá ser la altura normal en el espacio de Helmert $(H^N)^h$, que es la altura del teluroide de Helmert sobre el elipsoide de referencia. Sin embargo, en la práctica, las alturas de las observaciones de la gravedad sobre la superficie terrestre son alturas ortométricas H^o y la continuación ascendente de la gravedad normal se calcula usando H^o en lugar de $(H^N)^h$. Por lo tanto, se tiene que agregar una corrección a la gravedad normal. Esta corrección consiste en dos partes. La primera, que se ocasiona por la posición diferente del teluroide en el espacio real y el de Helmert, se conoce como efecto secundario indirecto. La segunda parte, que se debe a la diferencia entre la altura normal y la ortométrica, se conoce como la corrección para la altura ortométrica. Entonces, la expresión para la gravedad normal sobre el teluroide de Helmert está dada por.

$$\gamma_{r=r_{o+(H^N)^h}} = \gamma_{r=r_o+H^o} - \frac{2}{R} H^o \Delta g^{BS} - \frac{2}{R} \delta V^t - \frac{2}{R} \delta V^a. \quad (1.19)$$

El segundo término a la derecha es la corrección para la diferencia entre el cuasigeoide y el geoide (es decir, la diferencia entre la altura ortométrica y la normal). Los otros dos términos a la derecha son el efecto topográfico indirecto secundario sobre la gravedad (SITE: Secondary Indirect Topographical Effect), representado por $\delta \gamma^t$, y el efecto atmosférico indirecto secundario sobre la gravedad (SIAE: Secondary

Indirect Atmospheric Effect), representado por $\delta\gamma^a$. Al insertar las ecuaciones (1.17) y (1.19) en la (1.16) y con la anomalía de gravedad de aire libre definida como

$$\Delta g^{AL}(r_i, \Omega) = g(r_i, \Omega) - \gamma(r_o + H^o, \Omega) \quad (1.20)$$

la expresión para la evaluación de las anomalías de gravedad de Helmert sobre la superficie terrestre son.

$$\Delta g^h = \Delta g^{AL} + \frac{2}{R} H^o \Delta g^{BS} + \delta\gamma^f + \delta\gamma^a + \delta A^t + \delta A^a \quad (1.21)$$

Las anomalías de gravedad de aire libre no son muy suaves, lo que las hace poco apropiadas para la interpolación y el promediado. Por consiguiente, en la práctica se utilizan las anomalías de gravedad completas de Bouguer, que son más suaves, para producir los datos de gravedad medios. La anomalía de Bouguer completa se define como

$$\Delta g^{BC} = \Delta g^{BS} + \delta g^{ct} = \Delta g^{AL} - 2\pi\rho_o GH^o + \delta g^{ct} \quad (1.22)$$

donde Δg^{BS} es la anomalía de Bouguer simple y δg^{ct} es la corrección gravimétrica del terreno, es decir, una corrección para la atracción de la topografía terrestre con relación a la altura en el punto de evaluación.

Con las ecuaciones (1.21) y (1.22), las anomalías de Bouguer completa se pueden transformar a anomalías de gravedad de Helmert sobre la superficie terrestre. Entonces, la expresión para las anomalías de Helmert está dada como.

$$\Delta g^h = \Delta g^{BC} + 2\pi\rho_o GH^o - \delta g^{ct} + \frac{2}{R} H^o \Delta g^{BS} + \delta\gamma^f + \delta\gamma^a + \delta A^t + \delta A^a \quad (1.23)$$

La ecuación (1.23) contiene la corrección gravimétrica del terreno y el efecto topográfico directo. Sin embargo, la corrección del terreno está dentro del DTE, que es (según la ecuación 1.17a) la diferencia entre la atracción de las masas topográficas A^t y la atracción de las masas topográficas condensadas sobre el geoide A^c . El efecto topográfico directo DTE se puede expresar como una función de la corrección por terreno δg^{ct} y la corrección condensada del terreno δA^{cr} :

$$\delta A^t = \delta g^{ct} + \delta A^{cr} \quad (1.24)$$

La combinación de las ecuaciones (1.23) y (1.24) da la expresión final para la anomalía de gravedad de Helmert sobre la superficie terrestre.

$$\Delta g^h = \Delta g^{BC} + 2\pi\rho_o GH^o + \frac{2}{R} H^o \Delta g^{BS} + \delta\gamma^f + \delta\gamma^a + \delta A^{cr} + \delta A^a \quad (1.25)$$

3 Continuación descendente

Un vez que se evalúa la anomalía de gravedad de Helmert sobre la superficie terrestre se tiene que continuar a la frontera, en este caso el geoide. Este proceso se conoce como la continuación descendente de la anomalía de gravedad de Helmert.

El potencial de perturbación de Helmert es una función armónica sobre el cogeide de Helmert. La solución de Poisson al problema de Dirichlet de la continuación ascendente de una función armónica puede, por lo tanto, aplicarse a encontrar una solución al problema inverso, es decir, la continuación descendente.

La relación entre la anomalía de gravedad de Helmert sobre el geoide y la anomalía de gravedad de Helmert sobre la superficie terrestre está dada como sigue

$$\Delta g_t^h = \frac{R}{4\pi r} \int_{\Omega'} \Delta g_g^h K(r, \psi, R) d\Omega', \quad (1.26)$$

donde K es el kernel de Poisson. La solución al problema de la continuación descendente está dada como una solución de la ecuación integral de primer orden: se conoce Δg_t^h y se tiene que determinar Δg_g^h . Esta ecuación integral se puede resolver de forma iterativa; la derivación se encuentra en (Vaníček, et. Al., 1996).

La continuación descendente de Poisson se conoce como un problema no lineal e inestable. Debido a la inestabilidad, los errores en Δg_t^h pueden aparecer amplificados en la solución. Sin embargo, cuando se usan los valores medios en lugar de los valores de puntos, se puede evadir este problema.

4 Evaluación del geoide

4.1 Integración de Stokes:

Cuando se determinan los valores de frontera, es decir, las anomalías de gravedad en el cogeide, se puede resolver el problema del valor de frontera (1.8) y (1.5). La solución de T_g^h está dada por la fórmula de Stokes, y la separación entre la altura geoidal y el elipsoide de referencia se puede derivar según la fórmula de Bruns (1.3). La fórmula de Stokes (en el espacio de Helmert) se da como

$$N^h = \frac{R}{4\pi\gamma} \int_{\Omega'} \Delta g^h S(\psi) d\Omega', \quad (1.27)$$

donde N^h corresponde a las alturas cogeoidales y S al kernel de Stokes.

4.2 Efecto topográfico indirecto primario (PITE):

Ya que se obtiene el cogeide de Helmert, las alturas geoidales se tienen que regresar al espacio real. Esta transformación se lleva a cabo calculando el efecto topográfico

indirecto primario (PITE: Primary Indirect Topographical Effect) sobre el potencial, que se puede convertir fácilmente al efecto sobre el geoide. Para obtener el potencial perturbador en el espacio real, este efecto se tiene que añadir al potencial de perturbación de Helmert, es decir

$$T_g = T_g^h + \delta P_g \quad (1.28)$$

donde δP_g es el efecto indirecto primario sobre el potencial.

Cuando δP_g se divide entre su gravedad normal γ , se obtiene directamente el efecto sobre el geoide $N_{\delta P}$ y consecuentemente se puede añadir al cogeoides para obtener el geoide en el espacio real según la ecuación.

$$N = N^h + N_{\delta P} . \quad (1.29)$$

Se pueden despreciar el efecto indirecto primario y el efecto indirecto secundario atmosféricos, como se demuestra en (Nóvak, 2000). La ecuación (1.29) es la ecuación final en el proceso de la determinación del geoide preciso.

Referencias

- Heiskanen, W.A., Moritz H., 1967: Physical Geodesy, Freeman, San Francisco. Kellogg O.D., 1929: Foundations of potential theory, Springer, Berlin (reimpreso en Dover, Nueva York en 1953).
- Huang J., Vaníček P., Pagiatakis S., Brink W., 2001: Effect of topographical mass density variation on gravity and the geoid in the Canadian Rocky Mountains. *Journal of Geodesy* 74 (11-12), págs. 805 a 815.
- Huang J., Vaníček P., Novák P., 2000. An alternative algorithm to FFT for the numerical evaluation of Stokes's integral. *Studia Geophysica et Geodaetica* 44, págs. 374 a 380.
- Huang J., Vaníček P., Pagiatakis S., 2001: Computational Methods for the Discrete Downward Continuation of the Earth Gravity, IAG General Assembly, Budapest.
- Janák J., Vaníček P., Alberts B., 2001: Point and mean values of topographical effect, the Digital Earth Conference, Fredericton, junio 25 a 28.
- Martinec Z., 1993: Effect of lateral density variations of topographical masses in improving geoid model accuracy over Canada. Contact report for Geodetic Survey of Canada, Ottawa.
- Martinec Z., Matyska C., Grafarend E.W., Vaníček P., 1993: On Helmert's 2nd condensation method, *Manuscripta Geodaetica* 18, págs. 417 a 421.
- Martinec Z., Vaníček P., 1994: The indirect effect of topography in the Stokes-Helmert technique for a spherical approximation of the geoid. *Manuscripta Geodaetica* 19, págs. 213 a 219.
- Martinec Z., Vaníček P., 1994: Direct topographical effect of Helmert's condensation for a spherical geoid. *Manuscripta Geodaetica* 19, págs. 257 a 268.

- Martinec Z., Vaníček P., 1996: Formulation of the boundary-value problem for geoid determination with a higher-degree reference field, *Geophys. J. Int.* 126, págs. 219 a 228.
- Martínez Z., Vaníček P., Mainville A., Veronneau M., 1995: The effect of lake water on geoidal heights, *Manuscripta Geodaetica* 20, págs. 193 a 203.
- Martinec Z., 1996: Stability investigations of a discrete downward continuation problem for geoid determination in the Canadian Rocky Mountains, *Journal of Geodesy*, 70/11, 805 a 828.
- Martinec Z., Vaníček P., Mainville A., Veronneau M., 1996: Evaluation of topographical effects in precise geoid determination from densely sampled heights, *Journal of Geodesy*, 70(11), págs. 746 a 754.
- Martinec Z., 1998: *Geodetic Boundary Value problem*, Springer.
- Molodenskij M.S., Eremeev V.F., Yurkina M.I., 1960: *Methods for Study of the External Gravitational Field and Figure of the Earth*, traducido del ruso por el Programa Israel para traducciones científicas para la Oficina de Servicios Técnicos, Departamento de Comercio de los Estados Unidos, Washington, D.C., Estados Unidos de América, 1962.
- Moritz H., 1980: *Advanced Physical Geodesy*, H. Wichmann, Karlsruhe.
- Novák P., 2000: Evaluation of gravity data for the Stokes-Helmert solution to the geodetic boundary-value problem. Technical report núm. 207, GGE UNB, Fredericton.
- Novák P., Vaníček P., Martinec Z., Veronneau M., 2001: The effect of distant terrain on gravity and the geoid. *Journal of Geodesy* (en impresión).
- Novák P., Vaníček P., Veronneau M., Featherstone W.E., Holmes S.A., 2001: On the accuracy of modified Stokes's integration in high-frequency gravimetric geoid determination: A comparison of two numerical techniques. *Journal of Geodesy* 74, págs. 644 a 654.
- Sjöberg L.E., 1996: On the error of analytical continuation in physical geodesy, *Journal of Geodesy*, 70, págs. 724 a 730.
- Stokes G.G., 1849: On the variation of gravity at the surface of the earth, *Trans. Cambridge Philos. Soc.* VII, págs. 672 a 695.
- Sun W., Vaníček P., 1996: On the discrete problem of downward Helmert's gravity continuation. *Proceedings of Session G7 (Techniques for local geoid determination)*, Annual meeting of European Geophysical Society, The Hague, mayo 6 a 10, 1996, *Reports of the Finnish Geodetic Institute*, 96:2, págs. 29 a 34.
- Sun W., Vaníček P., 1998: On some problems of the downward continuation of $5' \times 5'$ mean Helmert's gravity disturbance. *Journal of Geodesy*, 72- 7-8, págs. 411 a 420.
- Vaníček P., Krakiwsky E.J., 1986: *Geodesy: the Concepts*. 2nd. rev. ed., North-Holland, Amsterdam.
- Vaníček P., Kleusberg A., 1987: The Canadian geoid - Stokesian approach, *Manuscripta Geodaetica* 12, págs. 86 a 98.
- Vaníček P., Sjöberg L.E., 1991: Reformulation of Stokes's theory for higher than second degree reference field and modification of integration kernels, *JGR* 96 (B4), págs. 6529 a 6539.
- Vaníček P., Martinec Z., 1994: Stokes-Helmert scheme for the evaluation of a precise geoid, *Manuscripta Geodaetica* 19, págs. 119 a 128.

Vaníček P., Najafi M., Martinec Z., Harrie L., Sjöberg L.E., 1996: Higher-order reference field in the generalized Stokes-Helmert scheme for geoid computation. *Journal of Geodesy*, 70 (3), págs. 176 a 182.

Vaníček P., Sun W., Ong P., Martinec Z., Najafi M., Vajda P., B ter Horst, 1996: Downward continuation of Helmert's gravity, *Journal of Geodesy*.

Vaníček P., Featherstone W.E., 1998: Performance of three types of Stokes's kernel in the combined solution for the geoid, *Journal of Geodesy*, 72, 12, págs. 684 a 697.

Vaníček P., Huang J., Novák P., Veronneau M., Pagiatakis S., Martinec Z., Featherstone W.E., 1999: Determination of boundary values for the Stokes-Helmert problem. *Journal of Geodesy* 73, págs. 180 a 192.

Vaníček P., Novák P., 1999: Comparison between planar and spherical models of topography. CGU Annual Meeting, Banff, mayo 9 a 13 de 1999.

Vaníček P., Janak J., 2000: The UNB technique for precise geoid determination, CGU meeting, Banff, mayo 24 a 26.

Wichiencharoen C., 1982: The indirect effect on the computation of geoid undulations. Dept. of Geodetic Science, Rep. 336, Ohio State University.

Dirección General de Geografía
Dirección de Investigación y Desarrollo
Subdirección de Investigación Geodésica
Departamento del Geoide